

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie ein Lösungsfundamentalsystem $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ der folgenden Differentialgleichungen (wenn möglich reell)

(a)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} x, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

mit Anfangsbedingungen $\alpha_i(0) = e_i$, $i = 1, 2, 3$, wobei e_1, e_2, e_3 die kanonische Basis von \mathbb{C}^3 bezeichnet.

(b)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

(c)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Aufgabe 3.

(a) Sei $h: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion ($b = \infty$ zugelassen) mit divergierendem uneigentlichem Integral

$$\int_a^b \frac{1}{h(x)} dx.$$

Dann gibt es für jedes $x_0 \in [a, b)$ eine streng monoton wachsende Lösung $\alpha: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $\dot{x} = h(x)$ mit $\alpha(0) = x_0$, und es gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = b$.

b.w.

- (b) Die Differentialgleichung $\ddot{x} = g - \rho \dot{x}^\beta$ ($g = \text{Erdbeschleunigung}$, β, ρ positive Konstanten) beschreibt einen durch Reibung gebremsten Fall eines Körpers im Schwerfeld der Erde.

Zeigen Sie: Es gibt auf \mathbb{R}_0^+ eine Lösung α mit $\alpha(0) = 0$, $\dot{\alpha}(0) = 0$ und $\ddot{\alpha} \geq 0$. Diese hat die "Endgeschwindigkeit" $v_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\alpha}(t) = (g/\rho)^{1/\beta}$. Berechnen Sie die Lösung explizit für $\beta = 1$ und $\beta = 2$.

Aufgabe 4.

- (a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a, b \in C^0(I)$. Sei $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0,$$

mit $\alpha(t) \neq 0$ auf einem Teilintervall $J \subset I$. Zeigen Sie, daß man auf J eine zweite von α linear unabhängige Lösung $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}$ findet in der Form $\beta(t) = \alpha(t)u(t)$, wobei u eine nichtkonstante Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{u} + \left(2\frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} + a(t)\right)\dot{u} = 0$$

ist.

- (b) Finden Sie eine Lösung α der Gleichung

$$\ddot{x} - \frac{1}{2t}\dot{x} + \frac{1}{2t^2}x = 0$$

auf $I = \mathbb{R}^+$ durch einen linearen Ansatz $\alpha(t) = mt + c$. Verwenden Sie (a), um eine von α linear unabhängige Lösung zu finden.

Abgabe: Freitag 06.06.08 bis 10 Uhr
in den entsprechend beschrifteten Briefkasten
im Keller des Mathematischen Instituts
(gegenüber der Fachschaft).