SS 2008 Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 10

Aufgabe 1.

(a) Sei $M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x_3 = x_1^2 x_2\}$.

(i) Zeigen Sie, daß M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) Geben Sie eine Karte $\Phi\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ an.

(iii) Geben Sie für $p = (0, 0, 0)$ eine Basis des Tangentialraumes T_pM und des Normalraumes N_pM an.

(b) Zeigen Sie, daß sowohl das Achsenkreuz $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ xy = 0\}$, als auch die Neil'sche Parabel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^3 = y^2\}$ keine eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^2$ sind.

Aufgabe 2. Sei $f\colon\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, u, v) = (z\bar{w} + \bar{z}w, i(\bar{z}w - z\bar{w}), |z|^2 - |w|^2);$$

dabei schreiben wir $z = x + iy$ und $w = u + iv$ als komplexe Variablen.

(a) Für alle $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ist das Urbild $f^{-1}(p)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$.

(b) Die Einschränkung $f|_{S^3}$ bildet S^3 surjektiv auf S^2 ab.

Bemerkung. Diese Abbildung $S^3 \to S^2$ wurde von Heinz Hopf gefunden und spielt eine wichtige Rolle in der Algebraischen Topologie, aber auch z.B. bei der Beschreibung magnetischer Monopole in der Elektrodynamik.

Aufgabe 3.

(a) Sei $\Omega := [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Berechnen Sie

$$\int_\Omega y \sin(xy)\, dx\, dy$$

als iteriertes Integral wie im Satz von Fubini (Satz 1.6).

b.w.

(b) Sei Ω der im ersten Quadranten liegende Teil der Einheitskreisscheibe. Berechnen Sie

$$\int_\Omega xy\,dx\,dy$$

(i) direkt, indem Sie Ω parametrisieren als

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}\};$$

(ii) durch Transformation auf Polarkoordinaten und Verwendung der Transformationsformel.

Aufgabe 4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f \in C^1(I, \mathbb{R}^+)$. Die Menge

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ z \in I,\ x^2 + y^2 = f(z)^2\}$$

ist eine **Rotationsfläche** in $\mathbb{R}^3$.

(a) M ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

(b) Geben Sie eine explizite Parametrisierung von M (bis auf einen Meridian) durch eine einzige Karte an.

(c) Zeigen Sie, daß der Flächeninhalt von M gegeben ist durch

$$\mathrm{Vol}_2(M) = 2\pi \int_I f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}\,dt.$$

(d) Überprüfen Sie die Richtigkeit der Formel in (c) anhand der im Nullpunkt $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ zentrierten Sphäre vom Radius R.

Abgabe: Freitag 20.06.08 bis 10 Uhr
in den entsprechend beschrifteten Briefkasten
im Keller des Mathematischen Instituts
(gegenüber der Fachschaft).