

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum.

- (a) Die 1-Formen $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in V^*$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r \neq 0$.
- (b) Eine k -Form $\omega \in \Lambda^k V^*$ heißt **zerlegbar**, falls $\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k$ für geeignete $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V^*$.
 - (i) Für $\dim V \leq 3$ ist jede 2-Form zerlegbar.
 - (ii) Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in V^*$ linear unabhängig, so ist $\alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_3 \wedge \alpha_4$ nicht zerlegbar.

Aufgabe 2. Auf dem \mathbb{R}^3 betrachte man die 2-Form

$$\omega = 2xz \, dy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x) \, dx \wedge dy.$$

Zeigen Sie, daß $d\omega = 0$ gilt, und bestimmen Sie eine stetig differenzierbare 1-Form η auf dem \mathbb{R}^3 mit $\omega = d\eta$.

Aufgabe 3. In der Vektoranalysis des euklidischen \mathbb{R}^3 hat man folgende Produktregeln für differenzierbare Funktionen f und differenzierbare Vektorfelder \mathbf{v}, \mathbf{w} :

- (i) $\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = f \operatorname{div} \mathbf{v} + \langle \operatorname{grad} f, \mathbf{v} \rangle$
- (ii) $\operatorname{rot}(f\mathbf{v}) = f \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{grad} f \times \mathbf{v}$
- (iii) $\operatorname{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{w} \rangle$.

Beweisen Sie diese Formeln, indem Sie die entsprechenden Formeln für Differentialformen herleiten.

b.w.

Aufgabe 4. Die obere Hälfte der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ sei mittels der stereographischen Projektion parametrisiert, d.h. für $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ mit $u^2 + v^2 < 1$ sei $\Phi(u, v)$ der Schnittpunkt von S^2 mit der Geraden durch die Punkte $(u, v, 0)$ und $(0, 0, -1)$.

(a) Zeigen Sie, daß

$$\Phi(u, v) = \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

(b) Berechnen Sie $\int_{\{u^2+v^2<1\}} \Phi^* \omega$ für die 2-Form

$$\omega = x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy.$$

Abgabe: Freitag 04.07.08 bis 10 Uhr
in den entsprechend beschrifteten Briefkasten
im Keller des Mathematischen Instituts
(gegenüber der Fachschaft).