

Funktionentheorie

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) der folgenden Polynome in dem jeweils angegebenen Gebiet:

$$(a) \quad z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2 \quad \text{in } |z| < 1, \quad (b) \quad z^5 + iz^3 - 4z + i \quad \text{in } 1 < |z| < 2.$$

Aufgabe 2. Es sei $\lambda > 1$. Zeigen Sie, daß die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ in der Halbebene $\operatorname{Re} z > 0$ genau eine Lösung hat, die überdies reell ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2^n} - z^{-2^n}}$$

auf $\mathbb{C}^* \setminus \{|z| = 1\}$ lokal gleichmäßig konvergiert, und bestimmen Sie die Grenzfunktion.

Hinweis: Schreiben Sie den Quotienten $1/(z^{2^n} - z^{-2^n})$ in geeigneter Weise als Differenz, so daß sich für die Partialsummen eine Teleskopsumme ergibt.

Aufgabe 4. Sei G ein Gebiet und f_1, f_2, \dots eine Folge in $\mathcal{O}(G)$, die in G lokal gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{O}(G)$ konvergiert. Es sei $F_n \in \mathcal{O}(G)$ eine Stammfunktion zu f_n , $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Folge F_1, F_2, \dots in G lokal gleichmäßig gegen eine Stammfunktion F von f konvergiert, wenn es einen Punkt $a \in G$ gibt, so daß die Folge $F_n(a)$ konvergiert.