SS 2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Funktionentheorie

Übungsblatt 3

Bitte vermerken Sie Ihre Gruppennummer auf Ihren Abgabeblättern!

Aufgabe 1. Eine **Periode** einer Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist eine komplexe Zahl w, so daß

$$f(z+w) = f(z)$$

gilt für alle $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie alle Nullstellen und Perioden der Funktionen $z \mapsto e^z$ und $z \mapsto \sin z$. Geben Sie eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ an, die unter $z \mapsto e^z$ bijektiv auf $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ abgebildet wird. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $z \mapsto |\sin z|$.

Aufgabe 2.

(a) Hat die Funktion $z \mapsto \operatorname{Re} z$ eine Stammfunktion?

(b) Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ die Strecke von $\gamma(a) = i$ nach $\gamma(b) = 1+2i$. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_\gamma \sin\big((1+i)z\big)dz \qquad \text{und} \qquad \int_\gamma \big(z^2 - i + 3z^{-2}\big)dz.$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel

$$\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^4} \qquad \text{und} \qquad \int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z+i}dz.$$

Aufgabe 4. Sei Ω ein offenes **Sterngebiet in $\mathbb{C}$ mit Zentrum** 0, d.h. mit jedem Punkt aus Ω liegt auch die Verbindungsstrecke mit 0 vollständig in Ω. Weiter seien u eine harmonische Funktion auf Ω und v die Funktion auf Ω gegeben durch

$$v(x,y) = \int_0^1 \Big(yu_x(tx,ty) - xu_y(tx,ty)\Big)dt$$

für $z = x+iy$, $z \in \Omega$. Zeigen Sie, daß $u+iv$ eine auf Ω holomorphe Funktion definiert. Ist dies die einzige holomorphe Funktion auf Ω mit Realteil u? Wo geht die Bedingung ein, daß Ω ein Sterngebiet ist?

Abgabe: Donnerstag 29.04.10

Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI