SS 2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Funktionentheorie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die stereographische Projektion

$$h_+ \colon\ S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

winkeltreu ist, d.h. für zwei differenzierbare Kurven

$$\gamma_1, \gamma_2 \colon\ (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$$

mit $\gamma_1(0) = p = \gamma_2(0)$ gilt

$$\measuredangle\big(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)\big) = \measuredangle\Big(\big(h_+ \circ \gamma_1\big)'(0), \big(h_+ \circ \gamma_2\big)'(0)\Big)\ .$$

Was können Sie über die Orientierung der Winkel sagen?
Hinweis: Nicht rechnen! Betrachten Sie Kreise auf S^2 durch p und $(0,0,1)$ und deren Projektion auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet folgender Laurentreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^k}{k^4+2}$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Laurentreihe der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten:

(a) $\displaystyle\frac{1}{z^2 - z}$ für $1 < |z-2| < 2$,

(b) $\displaystyle\frac{e^z}{z^2+1}$ für $|z| > 1$.

b.w.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Art der Singularitäten der folgenden Funktionen f im angegebenen Punkt z_0. Bei hebbaren Singularitäten bestimmen Sie ebenfalls den Grenzwert von f; für Pole den Hauptteil der Laurentreihenentwicklung:

(a) $f(z) = \exp\left(z - \frac{1}{z}\right) \qquad$ in $z_0 = 0$,

(b) $f(z) = \dfrac{z}{\sin z} \qquad$ in $z_0 = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Bonusaufgabe. Es seien $f(z) = \exp(1/z)$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ und $D_\varepsilon^* = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |z| < \varepsilon\}$. Zeigen Sie, daß $f(D_\varepsilon^*) = \mathbb{C}^*$ für alle $\varepsilon > 0$.

Bonusaufgabe. Sei eine holomorphe Funktion f auf dem Kreisring $A_{r,R}(z_0)$ gegeben durch eine Laurentreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$. Beweisen Sie die Cauchysche Koeffizientenformel durch Berechnung des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(\zeta - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \ ,$$

mit $0 < r < \varrho < R$. Begründen Sie vollständig die Vertauschung von Integration und Reihenbildung, und überlegen Sie sich, daß nur ein Summand der Reihe zum Integral beiträgt.

Abgabe: Donnerstag 20.05.10

Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI