SS 2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Funktionentheorie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Sei T_t, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, eine differenzierbare Familie von Automorphismen der offenen Einheitskreisscheibe $D = D_1(0)$, d.h. (vergl. Übungsblatt 7, Aufgabe 4)

$$T_t(z) = \frac{a(t)z + b(t)}{\overline{b}(t)z + \overline{a}(t)}, \quad z \in D,$$

wobei die Abbildungen $t \mapsto a(t)$ und $t \mapsto b(t)$ differenzierbare Abbildungen $(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ sind mit $|a(t)| > |b(t)|$ für jedes $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Es gelte $T_0 = \mathrm{id}$, d.h. $a(0) = 1$, $b(0) = 0$.

Für jedes feste $z \in D$ erhält man so eine differenzierbare Kurve $t \mapsto w(t) := w_z(t) := T_t(z)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, mit $w(0) = z$. Zeigen Sie, daß es Konstanten $\alpha \in \mathbb{C}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $z \in D$ die folgende Identität gilt:

$$\frac{dw}{dt}(0) = \alpha + i\beta z - \overline{\alpha} z^2.$$

Hinweis: Das Verstehen der folgenden Bemerkung ist nicht notwendig zum Bearbeiten dieser Aufgabe.

Bemerkung. Man stellt sich sinnvollerweise die Geschwindigkeit $(dw/dt)(0) \in \mathbb{C}$ als Vektor vor, der im Punkt $w(0) = z$ 'angeheftet' ist. Die Gesamtheit dieser Geschwindigkeitsvektoren (für $w = w_z$, $z \in D$) ist dann ein sogenanntes Vektorfeld auf D. Die Vektorfelder, die wie in dieser Aufgabe von einer Familie von Automorphismen von D herrühren, nennt man **infinitesimale Automorphismen** von D. Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(D)$ ist eine sogenannte **Lie-Gruppe**, d.h. eine Gruppe, die gleichzeitig die Struktur einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit trägt, so daß die Gruppenoperationen differenzierbare Abbildungen sind. Ein infinitesimaler Automorphismus ist ein Tangentialvektor an diese Lie-Gruppe in $\mathrm{id} \in \mathrm{Aut}(D)$, oder ein Element der sogenannten **Lie-Algebra** von $\mathrm{Aut}(D)$.

Aufgabe 2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und seien $g_0, g_1 \in \mathcal{O}(G)$. Sie dürfen als bekannt voraussetzen (Bonusaufgabe: zeigen Sie), daß jeder Punkt $z_0 \in G$ eine Umgebung hat, auf der die Differentialgleichung

$$w'' + g_1(z)w' + g_0(z)w = 0$$

zwei linear unabhängige Lösungen hat, die den Raum aller holomorphen Lösungen aufspannen.

Sei f eine holomorphe Lösung auf $D_\varepsilon(z_0) \subset G$. Zeigen Sie, daß sich f längs jedes Weges in G analytisch fortsetzen läßt.

Bemerkung. Mit dem Monodromiesatz, den wir in der Vorlesung zeigen werden, folgt dann für einfach zusammenhängendes G die Existenz einer auf ganz G holomorphen Lösung.

b.w.

Aufgabe 3. Sei X ein einfach zusammenhängender topologischer Raum. Seien $\alpha, \beta\colon [0,1] \to X$ Wege in X von einem Punkt $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ zu einem Punkt $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$. Zeigen Sie, daß α homotop zu β relativ zu $\{0,1\}$ ist.

Hinweis: Aus der Voraussetzung, daß X einfach zusammenhängend ist, folgt die Existenz einer Homotopie rel $\{0,1\}$ des zusammengesetzten Weges $\alpha\beta^{-1}$ zum konstanten Weg in x_0. Benutzen Sie diese Homotopie zur Konstruktion der gewünschten Homotopie H mit $H_t(1) = x_1$ für alle $t \in [0,1]$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist, erzeugt durch die Homotopieklasse rel $\{0,1\}$ der Schleife γ, wo

$$\gamma(t) = e^{2\pi i t}, \quad t \in [0,1].$$

Hinweis: Für eine Schleife α in $\mathbb{C}^*$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = 1$, setze

$$\alpha_t = \alpha|_{[0,t]}$$

und

$$\tilde{\alpha}(t) = \int_{\alpha_t} \frac{dz}{z}, \quad t \in [0,1].$$

Zeigen Sie, daß dies einen Weg in $\mathbb{C}$ definiert mit $\tilde{\alpha}(0) = 0$ und $\exp(\tilde{\alpha}(t)) = \alpha(t)$. Überlegen Sie sich, daß $\tilde{\alpha}$ in $\mathbb{C}$ homotop rel $\{0,1\}$ zur Strecke von 0 nach $2\pi i k$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{Z}$ ist.

Abgabe: Donnerstag 10.06.10

Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI