SS 2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Funktionentheorie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Zeigen Sie mittels analytischer Fortsetzung, daß es eine holomorphe Funktion $f\colon\ G \to \mathbb{C}$ mit $e^{f(z)} = z$ für alle $z \in G$ gibt. Zeigen Sie weiter, daß dann $\{f + 2\pi ik\colon\ k \in \mathbb{Z}\}$ die Menge aller holomorphen Funktionen auf G mit dieser Eigenschaft ist. Auf G existieren also global definierte **Zweige des Logarithmus**.

Aufgabe 2.

(a) Für ganze Zahlen n, k und $r \in (0,1) \cup (1,\infty)$ sei folgende Kurve gegeben:

$$\gamma(t) = e^{int} + re^{ikt} \qquad \text{mit} \quad t \in [0, 2\pi)\ .$$

Bestimmen Sie die Umlaufzahl von γ um 0.

(b) Sei $\gamma\colon\ [a,b] \to G$ eine stetige, geschlossene Kurve in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Sei $B \subset G$ eine abgeschlossene Kreisscheibe, so daß $\gamma([a,b]) \cap B$ aus einem einzigen Bogen von einem Randpunkt zu einem anderen Randpunkt besteht, so daß $B \setminus \gamma([a,b])$ zwei Wegzusammenhangskomponenten besitzt. Sei z_1 ein Punkt in einer der beiden Zusammenhangskomponenten, z_2 ein Punkt der anderen. Die Umlaufzahl $n(\gamma, z_1)$ sei bekannt. Bestimmen Sie $n(\gamma, z_2)$.

Aufgabe 3.

(a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, auf dem ein Zweig des Logarithmus definiert ist. Zeigen Sie, daß man dann für jede natürlich Zahl k auf G eine **holomorphe Wurzelfunktion** $z \mapsto \sqrt[k]{z}$, d.h. eine holomorphe Umkehrfunktion von $z \mapsto z^k$, definieren kann.

(b) Sei $\gamma\colon\ [a,b] \to \mathbb{C}^*$ eine stetige, geschlossene Kurve, die im Punkte $\gamma(a)$ die positive reelle Achse schneide. Für alle $t \in [a,b]$ sei $\sqrt[k]{\gamma(t)}$ durch die Bedingung $\sqrt[k]{\gamma(a)} \in \mathbb{R}$ und die Forderung, daß die Abbildung $t \mapsto \sqrt[k]{\gamma(t)}$ stetig sei, definiert. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \sqrt[k]{z}\, dz$ für gegebene k, $\gamma(a)$ und $n(\gamma, 0)$.

Aufgabe 4. Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ und u eine harmonische Funktion auf G. Zeigen Sie, daß u Realteil einer auf ganz G holomorphen Funktion ist.

Abgabe: Donnerstag 17.06.10

Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI