SS 2011

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Differentialtopologie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung mit $f(0) = 0$. Definiere

$$\begin{array}{rccc} F\colon & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ & (t, x) & \longmapsto & \begin{cases} f(tx)/t & \text{für } t \neq 0, \\ J_f(0)(x) & \text{für } t = 0. \end{cases} \end{array}$$

Zeigen Sie, daß F differenzierbar ist.

Aufgabe 2. Sei $M \times N$ das Produkt zweier differenzierbarer Mannigfaltigkeiten M, N, mit Mannigfaltigkeitsstruktur wie in der Zusatzaufgabe von Blatt 2 erklärt.

(a) Für jeden Punkt $(p, q) \in M \times N$ gilt

$$T_{(p,q)}(M \times N) = T_pM \times T_qN.$$

(b) Sei $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung und $F\colon M \to M \times N$ die durch $F(p) = (p, f(p))$ definierte Abbildung.

(i) Die Abbildung F ist differenzierbar, und es gilt

$$T_pF(X) = (X, T_pf(X))$$

für $p \in M$, $X \in T_pM$.

(ii) Der Tangentialraum an den Graphen von f im Punkt $(p, f(p))$ ist der Graph der Abbildung $T_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N$.

Aufgabe 3. Ein **Vektorfeld** X auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine stetige Abbildung $X\colon M \to TM$ mit $X(p) \in T_pM$ für jeden Punkt $p \in M$. Meist schreibt man X_p statt $X(p)$. Ein Vektorfeld heißt **differenzierbar**, falls $X \in C^\infty(M, TM)$.

(a) Überlegen Sie sich, daß ein Vektorfeld X genau dann differenzierbar ist, wenn in jedem lokalen Koordinatensystem $(U; x_1, \ldots, x_m)$ auf M gilt, daß $X|_U = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ mit $a_i \in C^\infty(U)$, $i = 1, \ldots, m$.

(b) Ein Vektorfeld ist differenzierbar genau dann, wenn für jede offene Menge $V \subset M$ und $f \in C^\infty(V)$ gilt, daß die Funktion Xf auf V, definiert durch $(Xf)(p) := X_pf$, differenzierbar ist.

Aufgabe 4. Das Tangentialbündel TM einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M heißt **trivial** (und M **parallelisierbar**), falls es einen Diffeomorphismus

$$TM \longrightarrow M \times \mathbb{R}^m$$

gibt, der T_pM linear auf $\{p\} \times \mathbb{R}^m$ abbildet für jedes $p \in M$.

(a) TM ist trivial genau dann, wenn es m Vektorfelder $X_1, \ldots, X_m$ auf M gibt, so daß die Vektoren $X_1(p), \ldots, X_m(p)$ linear unabhängig sind für jedes $p \in M$. (Man nennt solche Vektorfelder *punktweise linear unabhängig.*)

(b) $T\mathbb{R}^m$ ist trivial.

(c) TS^1 und TS^3 sind trivial. (Hinweis: $S^1 \subset \mathbb{C}$, $S^3 \subset \mathbb{H}$)

Abgabe: Montag 2.05.11
Bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI