SS 2011

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Differentialtopologie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Das Möbiusband kann definiert werden als Quotientenraum von $[0,2\pi]\times(-1/2,1/2)$ unter der Identifikation $(2\pi,v)\sim(0,-v)$.

(a) Verifizieren Sie, daß dieser Quotientenraum in offensichtlicher Weise eine Mannigfaltigkeit und ein Vektorbündel über S^1 ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Teilmenge

$$\big\{\big(\cos\varphi(1+\lambda\cos\frac{\varphi}{2}),\sin\varphi(1+\lambda\cos\frac{\varphi}{2}),\lambda\sin\frac{\varphi}{2}\big)\colon\ \varphi\in[0,2\pi],\lambda\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\big\}$$

des $\mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit diffeomorph zum Möbiusband ist.

(c) Beschreiben Sie explizit einen Bündelisomorphismus (unter der Identifikation von $\mathbb{R}P^1$ mit S^1) zwischen dem Möbiusband und dem kanonischen Geradenbündel

$$\big\{\big([x],\lambda x\big)\in\mathbb{R}P^1\times\mathbb{R}^2\colon\ x\in S^1,\lambda\in\mathbb{R}\big\}$$

über $\mathbb{R}P^1=S^1/x\sim -x$.

Aufgabe 2. Sei (E,π,B) ein Geradenbündel (d.h. ein eindimensionales Vektorbündel) über einem zusammenhängenden Raum B. Ein solches Geradenbündel heißt *orientierbar*, falls man in jeder Faser $\pi^{-1}(b)$ eine Orientierung so wählen kann, daß es einen Bündelatlas $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\colon\ \alpha\in A\}$ gibt, s.d. $\varphi_\alpha\colon\ \pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathbb{R}$ jede Faser $\pi^{-1}(b)$, $b\in U_\alpha$, orientierungserhaltend auf $\{b\}\times\mathbb{R}$ (mit der Standardorientierung) abbildet. Zeigen Sie:

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Das Geradenbündel ist orientierbar.
- (ii) $E\setminus\{\text{Nullschnitt}\}$ ist nicht zusammenhängend.
- (iii) Das Geradenbündel ist trivial.

(b) Das kanonische Geradenbündel über $\mathbb{R}P^1$ ist nicht trivial.

Aufgabe 3. Gegeben seien ein Vektorbündel (E, π, B) vom Rang n, ein topologischer Raum A, und eine stetige Abbildung $f\colon A \to B$. Ziel dieser Aufgabe ist es, ein Bündel $(f^*E, f^*\pi, A)$ und einen faserweise isomorphen Bündelmorphismus $\tilde{f}\colon f^*E \to E$ über f zu konstruieren, d.h. folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ {\scriptstyle f^*\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Dazu definieren wir

$$f^*E = \{(a, e) \in A \times E\colon\ f(a) = \pi(e)\},$$

sowie $f^*\pi(a, e) = a$ und $\tilde{f}(a, e) = e$.

(a) Verifizieren Sie die Kommutativität des Diagrammes, d.h. $\pi \circ \tilde{f} = f \circ f^*\pi$.

(b) Bestimmen Sie die Faser von f^*E über einem Punkt $a \in A$, und zeigen Sie, daß die Einschränkung von $\tilde{f}$ auf diese Faser ein Isomorphismus auf die Bildfaser ist.

(c) Sei (V, φ) eine Bündelkarte für E und $U \subset A$ eine Teilmenge mit $f(U) \subset V$. Zeigen Sie, daß durch

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \longrightarrow & U \times \mathbb{R}^n \\ (a, e) & \longmapsto & (a, \mathrm{pr}_2 \circ \varphi(e)), \end{array}$$

wo mit pr_2 die Projektion auf den zweiten Faktor in $V \times \mathbb{R}^n$ bezeichnet ist, eine Bündelkarte für f^*E definiert ist. Geben Sie die inverse Abbildung dieser Bündelkarte explizit an.

(d) Abschließend soll gezeigt werden, daß dieses sogenannte *induzierte Bündel* f^*E eindeutig bis auf Bündelisomorphismus ist. Gegeben seien ein Bündel (E', π', A) und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\tilde{f}'} & E \\ {\scriptstyle \pi'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

mit $\tilde{f}'$ faserweise isomorph. Zeigen Sie, daß durch $g(e') = (\pi'(e'), \tilde{f}'(e'))$ für $e' \in E'$ ein Bündelisomorphismus $E' \to f^*E$ gegeben ist.

Aufgabe 4. Es sei U ein topologischer Raum und $f\colon U \to \mathcal{M}(n \times k)$ eine Abbildung in den Vektorraum der reellen $(n \times k)$-Matrizen. Definiere

$$\begin{array}{cccccc} F: & U & \times & \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (u & , & x) & \longmapsto & f(u) \cdot x \end{array}$$

(a) Die Abbildung F ist genau dann stetig, wenn f stetig ist.

(b) Ist U eine Mannigfaltigkeit, so ist F genau dann differenzierbar, wenn f differenzierbar ist.

Abgabe: Montag 30.05.11
Bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI