SS 2011

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Differentialtopologie

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Sei L eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Kodimension k mit trivialem Normalenbündel in einer Mannigfaltigkeit M. Erklären Sie, wie man mittels einer Tubenumgebung von L in M eine differenzierbare Abbildung $f\colon M \to S^k$ definieren kann, so daß L Urbild eines regulären Wertes von f ist.

Aufgabe 2. Es seien $f_0, f_1\colon M \to N$ und $g_0, g_1\colon N \to W$ jeweils isotope Einbettungen. Dann sind auch $g_0 \circ f_0$ und $g_1 \circ f_1$ isotope Einbettungen.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß für $n > m$ je zwei Einbettungen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ isotop zueinander sind. Gilt dies auch für $n = m$?

Hinweis: Übungsblatt 4, Aufgabe 1.

Aufgabe 4. Eine Isotopie $F\colon M \times I \to N$ von Einbettungen, wobei $I = [0, 1]$, induziert eine niveauerhaltende Abbildung $G\colon M \times I \to N \times I$, $(x, t) \mapsto (F(x, t), t)$. Ziel dieser Aufgabe ist die Konstruktion einer Isotopie F mit der Eigenschaft, daß die zugehörige niveauerhaltende Abbildung G keine Einbettung ist (im Gegensatz zu einer Behauptung in vielen Büchern).

(a) Definiere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(s) = 0$ für $s \leq 0$ und $f(s) = e^{-1/s}$ für $s > 0$. Für $t \in I$ und $s > 0$ setze

$$g_t(s) = \frac{f(s)}{f(s) + f(\frac{t}{4} - s)}$$

und

$$h_t(s) = g_t(s - \frac{t}{2}) g_t(\frac{3t}{2} - s).$$

Skizzieren Sie die Graphen dieser differenzierbaren Funktionen.

(b) Mit $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ definiere $F\colon\ \mathbb{R}^+ \times I \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x,t) = \begin{cases} (x, h_t(x)) & \text{für } x \in (0,2], t \in (0,1] \\ (x, 0) & \text{für } x \in (0,2], t = 0 \\ \text{unabhängig von } t & \text{für } x \geq 2, \text{ siehe Abbildung 1} \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, daß $F_t := F(\,.\,, t)\colon\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ eine Einbettung ist für jedes $t \in I$.

(ii) Verifizieren Sie die Differenzierbarkeit von F. In Punkten (x,t) mit $x > 3/2$ oder $t > 0$ ist dies offensichtlich; für Punkte $(x, 0)$ mit $0 < x \leq 3/2$ ist zu überlegen, was sich über $F(x_i, t_i)$ für $(x_i, t_i) \to (x, 0)$ aussagen läßt.

(c) Zeigen Sie, daß $G\colon\ (x,t) \mapsto (F(x,t), t)$ keine Einbettung von $\mathbb{R}^+ \times I$ nach $\mathbb{R}^2 \times I$ definiert, da G kein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^+ \times I$ auf sein Bild ist. Sei dazu $x_0 > 2$ so gewählt, daß $F(x_0, t)$ der Punkt $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ ist für alle $t \in I$, und betrachten Sie das Bild unter G der beiden Folgen (x_0, t_i) mit $t_i \to 0$ und (x_i, x_i) mit $x_i \to 0$.

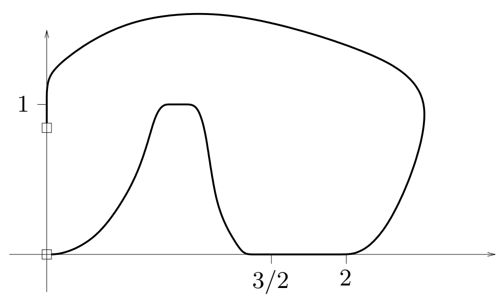

Abbildung 1: Das Bild der Abbildung F_t.

Abgabe: Montag 20.06.11
Bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI