SS 2011

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Differentialtopologie

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Die verbundene Summe $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3$ ist diffeomorph zu dem Quotientenraum

$$(S^2 \times \mathbb{R})/\sim,$$

wobei unter den Abbildungen

$$\begin{array}{rccccccc} \alpha_+ : & S^2 & \times & \mathbb{R} & \longrightarrow & S^2 & \times & \mathbb{R} \\ & ((x,y,z) & , & t) & \longmapsto & ((-x,-y,-z) & , & 2-t) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccccccc} \alpha_- : & S^2 & \times & \mathbb{R} & \longrightarrow & S^2 & \times & \mathbb{R} \\ & ((x,y,z) & , & t) & \longmapsto & ((-x,-y,-z) & , & -2-t) \end{array}$$

identifiziert wird.

Aufgabe 2. (a) Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand. Weiter seien $\varphi_1, \varphi_2\colon \partial N \to \partial M$ Diffeomorphismen. Falls es einen Diffeomorphismus $f\colon M \to M$ mit $f|_{\partial M} \circ \varphi_1 = \varphi_2$ gibt, so sind die Randverheftungen $M \cup_{\varphi_1} N := (M+N)/\sim$, wobei $q \sim \varphi_1(q)$ für $q \in \partial N$, und $M \cup_{\varphi_2} N$ diffeomorph.

(b) Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sei φ_A die Abbildung

$$\begin{array}{ccccccccc} S^1 & \times & S^1 & \longrightarrow & S^1 & \times & S^1 & \subset & \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \\ (z & , & w) & \longmapsto & (z^a w^c & , & z^b w^d). & & \end{array}$$

Zeigen Sie, daß φ_A ein Diffeomorphismus ist.

(c) Sei M eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit und $f\colon S^1 \times D^2 \to M$ eine Einbettung. Sei M' die Randverheftung

$$\big(M \backslash f(S^1 \times \mathrm{Int}(D^2))\big) \cup_{f \circ \varphi_A} S^1 \times D^2.$$

Man sagt, M' entsteht aus M durch **Dehn-Chirurgie**.

(i) M' hängt (bis auf Diffeomorphie) nur von dem Koeffizienten $d/c \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ab.

(ii) Für $c = \pm 1$ ist M' das Ergebnis einer elementaren Chirurgie an M.

(iii) Für $c = 0$ ist M' diffeomorph zu M.

Aufgabe 3. Sei (B, p) ein offenes Buch auf der geschlossenen Mannigfaltigkeit M, d.h. $B \subset M$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 2 mit einer Umgebung diffeomorph zu $B \times D^2$, und $p\colon\ M \setminus B \to S^1$ ist eine lokal triviale Faserung, die auf $B \times (D^2 \setminus \{0\})$ durch die Winkelkoordinate im Faktor $D^2 \setminus \{0\}$ gegeben ist. Definiere die Monodromie dieses offenen Buches wie im Beweis von Satz 8.2 der Vorlesung. Zeigen Sie, daß diese Monodromie bis auf eine Isotopie, die den Rand der Seite $p^{-1}(0)$ fest läßt, nicht von der Wahl der Metrik in diesem Beweis abhängt.

Aufgabe 4. Betrachte S^3 als die Einheitssphäre in $\mathbb{C}^2$:

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\colon\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Setze

$$B = \{(z_1, z_2) \in S^3\colon\ z_1 z_2 = 0\}.$$

(a) Visualisieren Sie B als Verschlingung (d.h. eine Vereinigung disjunkt eingebetteter Kopien von S^1) in $\mathbb{R}^3 = S^3 \setminus \{\infty\}$.

(b) Betrachten Sie die Abbildung

$$p\colon\ S^3 \setminus B \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{C}, \quad (z_1, z_2) \longmapsto z_1 z_2 / |z_1 z_2|.$$

Zeigen Sie, daß dies auf S^3 die Struktur eines offenen Buches definiert, und bestimmen Sie dessen Seite und Monodromie.

Abgabe: Montag 11.07.11
Bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI