SS 2012 Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Max Dörner

Mathematik II

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f überall zweimal partiell differenzierbar ist und berechnen Sie explizit die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0).$$

Gilt $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Ist f im Nullpunkt stetig?

Aufgabe 2. Aus einem Potential $\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto V(x,y,z) \in \mathbb{R}$ erhält man das Kraftfeld $F(x,y,z)$ auf dem $\mathbb{R}^3$ als

$$F = -\text{grad}\, V.$$

Die Potentialfunktion einer Kugel vom Radius R,

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R\},$$

ist definiert durch

$$V(r) = \begin{cases} -2\pi R^2 + \dfrac{2\pi}{3} r^2 & \text{für } r < R, \\ \dfrac{-4\pi R^3}{3r} & \text{für } r \geq R. \end{cases}$$

Berechnen Sie das Kraftfeld F und dessen Divergenz für $0 \leq r < R$ und $r > R$.

Aufgabe 3. Seien $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbare Abbildungen. Zeigen Sie die Kettenregel für $f \circ \gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, d.h.

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_0) = \langle \text{grad}\, f(\gamma(t_0)), \dot{\gamma}(t_0) \rangle,$$

wobei $\dot{\gamma}(t_0) := \dfrac{d\gamma}{dt}(t_0)$.

Hinweis: Schreiben Sie den Restterm $\varphi(h)$ in der Darstellung von f als differenzierbare Abbildung im Punkt $\gamma(t_0)$ in der Form $\varphi(h) = \varphi_0(h) \cdot ||h||$ mit $\varphi_0(h) \longrightarrow 0$ für $h \longrightarrow 0$.

b.w.

Aufgabe 4. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Weiter seien $a, b \in D$ derart, daß das gesamte Segment
$$[a,b] := \{a + t(b-a)\colon\ t \in [0,1]\}$$
in D liegt. Zeigen Sie den folgenden **Mittelwertsatz** (vergl. I.6.10): Es gibt ein $c \in [a,b] \setminus \{a,b\}$ mit
$$f(b) - f(a) = \langle \operatorname{grad} f(c), b-a \rangle.$$

Hinweis: Wenden Sie die Kettenregel und den Mittelwertsatz der 1-dimensionalen Differentialrechnung auf die Funktion $\phi(t) = f(a + t(b-a))$ an.

Aufgabe 5. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Interpretation der Divergenz eines Vektorfeldes als *Quellstärke* zu verstehen. Dazu sei ein differenzierbares Vektorfeld $v = (v_1, \ldots, v_n)$ auf dem $\mathbb{R}^n$ gegeben. Im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir den achsenparallelen Würfel der Kantenlänge $\varepsilon > 0$, d.h. das Parallelepiped, das von den Vektoren εe_i, $i = 1, \ldots, n$, im Punkt a aufgespannt wird.

Nun lassen wir diesen Würfel unter dem Einfluß von v 'fließen'. Dies bedeutet, daß sich jeder Punkt auf einer Bahn γ bewegt, deren Geschwindigkeitsvektor $\dot{\gamma}(t)$ in jedem gegebenen Bahnpunkt $\gamma(t)$ gleich dem Vektor $v(\gamma(t))$ ist. (Wie in Aufgabe 3 bezeichnen wir mit einem Punkt die Ableitung nach der Zeitvariablen t.)

Für kleine Zeiten t ergibt sich in erster Näherung, daß sich der Eckpunkt a des Würfels nach $a + tv(a)$ bewegt, die Eckpunkte $a + \varepsilon e_i$ nach $a + \varepsilon e_i + tv(a + \varepsilon e_i)$. Wir erhalten also ein neues Parallelepiped, das von den Vektoren
$$u_i(\varepsilon, t) := \varepsilon e_i + t\bigl(v(a + \varepsilon e_i) - v(a)\bigr), \quad i = 1, \ldots, n,$$
aufgespannt wird.

Nun endlich zur Aufgabenstellung: Sei $V_\varepsilon(t)$ das Volumen dieses Parallelepipeds, d.h.
$$V_\varepsilon(t) = \det\bigl(u_1(\varepsilon, t), \ldots, u_n(\varepsilon, t)\bigr),$$
wobei wir die $u_i(\varepsilon, t)$ als Spaltenvektoren einer $(n \times n)$-Matrix auffassen. Berechnen Sie $\dot{V}_\varepsilon(0)$, und zeigen Sie, daß
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\dot{V}_\varepsilon(0)}{V_\varepsilon(0)} = \operatorname{div} v(a).$$
Die Divergenz ist also in der Tat ein Maß dafür, wie sich ein 'infinitesimales' Volumen unter dem 'Fluß' des Vektorfeldes ausdehnt (bei positiver Divergenz) oder zusammenzieht (bei negativer Divergenz).

Abgabe: Montag 16.4.12,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.