Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Max Dörner

Mathematik II

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4.$$

Skizzieren Sie den Graph dieser Funktion. Warum nennt der Volksmund die dadurch im $\mathbb{R}^3$ gegebene Fläche *Affensattel*?

Aufgabe 2. Wir betrachten ein Dreieck ΔABC im $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken

$$A = (1,0), \quad B = (\cos x, \sin x), \quad C = (\cos y, \sin y),$$

wobei $(x,y) \in Q := [0,2\pi) \times [0,2\pi)$ gewählt werden soll. Die drei Ecken liegen also alle auf dem Einheitskreis.

(a) Zeigen Sie, daß der orientierte Flächeninhalt $F(x,y)$ von ΔABC gegeben ist durch

$$F(x,y) = \frac{1}{2}(\cos x \sin y - \sin x \cos y + \sin x - \sin y).$$

Hierbei soll der Flächeninhalt positiv sein, wenn die Ecken ABC im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden; negativ, wenn die Ecken im Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Wenn zwei der Ecken zusammenfallen, ist der Flächeninhalt gleich Null.

(b) Bestimmem Sie die kritischen Punkte von F im halboffenen Quadrat Q, d.h. die Punkte, wo der Gradient von F der Nullvektor ist.

(c) Bestimmen Sie die Hessesche Matrix von F in diesen kritischen Punkten. Klären Sie, ob die jeweilige Matrix positiv/negativ definit oder indefinit ist, ob also ein Minimum/Maximum vorliegt. Falls an einem der kritischen Punkte keiner dieser drei Fälle eintritt, entscheiden Sie durch eine Betrachtung des Werteverhaltens von F in einer Umgebung dieses kritischen Punktes, ob ein Extremum vorliegt oder nicht.

(d) Auf den Randpunkten des halboffenen Quadrates Q läßt sich der Satz aus der Vorlesung über ein hinreichendes Kriterium für Extrema nicht direkt anwenden. Warum ist das im gegebenen Fall kein Problem?

(e) Interpretieren Sie die obigen Ergebnisse geometrisch.

b.w.

Aufgabe 3. (a) Im $\mathbb{R}^n$ seien k (nicht notwendig verschiedene) Punkte $a_1, \ldots, a_k$ gegeben. Zeigen Sie, daß die Summe der Abstandsquadrate

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \|x - a_j\|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

genau ein lokales Minimum hat, und zwar im Schwerpunkt $x_0 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} a_j$ des Punktesystems. Begründen Sie, warum dort tatsächlich das globale Minimum der Funktion f angenommen wird, d.h. $f(x) > f(x_0)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$.

(b) Im $\mathbb{R}^2$ seien drei (nicht notwendig verschiedene) Punkte a, b, c gegeben. Für $x \in \mathbb{R}^2$ sei

$$g(x) = \|x - a\| + \|x - b\| + \|x - c\|$$

die Summe der Abstände zu diesen drei Punkten. Beachten Sie, daß die Funktion g nur auf der Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b, c\}$ stetig partiell differenzierbar ist. Zeigen Sie, daß die Funktion g ein eindeutiges globales Minimum hat, und zwar — je nach Lage der drei Punkte — in einem der Punkte a, b, c oder in einem Punkt x_0 mit der Eigenschaft, daß die Geradensegmente von x_0 nach a, b bzw. c in x_0 paarweise einen Winkel von 120 Grad einschließen. Unter welcher Bedingung an a, b, c tritt der eine oder der andere Fall ein? Skizzieren Sie dazu das Gradientenfeld ∇g z.B. in der Nähe des Punktes a, in Abhängigkeit von dem Winkel, den die Vektoren $b - a$ und $c - a$ bilden.

Abgabe: Freitag 27.4.12,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.