Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Max Dörner

Mathematik II

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Diskutieren Sie Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \frac{1}{2}\,x^3.$$

Bestimmen Sie durch Separation der Variablen explizit eine Lösung α mit Startwert $\alpha(0) = x_0 > 0$. Was ist das maximale Lösungsintervall dieser Lösung?

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\alpha\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie ein (wenn möglich reelles) Lösungsfundamentalsystem $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ der folgenden Differentialgleichungen:

(a)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} x, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

mit Anfangsbedingungen $\alpha_i(0) = e_i$, $i = 1, 2, 3$, wobei (e_1, e_2, e_3) die kanonische Basis von $\mathbb{C}^3$ bezeichnet.

(b)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

(c)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

b.w.

Aufgabe 4. (a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a, b \in C^0(I)$. Sei $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0,$$

mit $\alpha(t) \neq 0$ auf einem Teilintervall $J \subset I$. Zeigen Sie, daß man auf J eine zweite von α linear unabhängige Lösung $\beta\colon J \to \mathbb{R}$ findet in der Form $\beta(t) = \alpha(t)u(t)$, wobei u eine nichtkonstante Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{u} + \left(2\,\frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} + a(t)\right)\dot{u} = 0$$

ist.

(b) Finden Sie eine Lösung α der Gleichung

$$\ddot{x} - \frac{1}{2t}\,\dot{x} + \frac{1}{2t^2}\,x = 0$$

auf $\mathbb{R}^+$ durch einen linearen Ansatz $\alpha(t) = mt + c$. Verwenden Sie (a), um eine von α linear unabhängige Lösung zu finden.

Aufgabe 5. (a) Sei $h\colon [a, b) \to \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion ($b = \infty$ ist zugelassen) mit divergierendem uneingentlichem Integral

$$\int_a^b \frac{1}{h(x)}\,dx,$$

das heißt

$$\int_a^s \frac{1}{h(x)}\,dx \longrightarrow \infty \ \text{ für } \ s \longrightarrow b, s < b.$$

Zeigen Sie, daß es für jedes $x_0 \in [a, b)$ eine streng monoton wachsende Lösung $\alpha\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $\dot{x} = h(x)$ mit $\alpha(0) = x_0$ gibt, und daß $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = b$ gilt.

(b) Die Differentialgleichung $\ddot{x} = g - \rho\dot{x}^\beta$ (g = Erdbeschleunigung, β, ρ positive Konstanten) beschreibt einen durch Reibung gebremsten Fall eines Körpers im Schwerefeld der Erde.

Zeigen Sie: Es gibt auf $\mathbb{R}_0^+$ eine Lösung α mit $\alpha(0) = 0$, $\dot{\alpha}(0) = 0$ und $\ddot{\alpha} \geq 0$. Diese hat die "Endgeschwindigkeit" $v_\infty := \lim_{t\to\infty} \dot{\alpha}(t) = (g/\rho)^{1/\beta}$. Berechnen Sie die Lösung explizit für $\beta = 1$ und $\beta = 2$.

Abgabe: Freitag 25.5.12,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.