Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Max Dörner

Mathematik II

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kegels

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$$

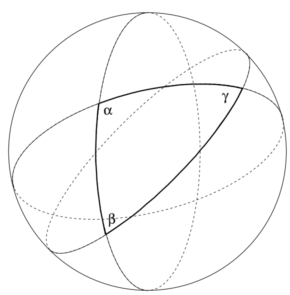
mittels jeder der folgenden Methoden:

(i) Flächeninhaltsformel aus der Vorlesung, mit der Parametrisierung $(x,y) \mapsto (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$.

(ii) Wie (i), aber mit der Parametrisierung $(r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r)$.

(iii) 'Aufschneiden' des Kegels entlang $\{x = z \in [0,1],\ y=0\}$ und 'Ausrollen' in der Ebene; dann elementargeometrische Überlegung.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß ein von drei Großkreisen auf S^2 berandetes sphärisches Dreieck mit den Winkeln α, β, γ den Flächeninhalt $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ hat. Diese Zahl heißt der **sphärische Exzeß** des Dreiecks.



Hinweis: Wie groß ist der Flächeninhalt zwischen zwei Großkreisen? Der Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich dann aus einer elementargeometrischen Überlegung.

Aufgabe 3. Sei Ω der im ersten Quadranten liegende Teil der Einheitskreisscheibe. Berechnen Sie

$$\int_\Omega xy\,dx\,dy$$

auf beide der folgenden Weisen:

(i) Direkt, indem Sie Ω parametrisieren als

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\},$$

und das Integral als iteriertes Integral

b.w.

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy\,dx \right) dy$$

interpretieren.

(ii) Durch Transformation auf Polarkoordinaten und Verwendung der Transformationsformel.

Aufgabe 4. Auf $\mathbb{R}^3$ seien die 1-Formen

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy - xy\,dz \\ \omega_2 &= \omega_1 + 2xy\,dz \end{aligned}$$

gegeben. Welche der Formen ist geschlossen? Welche der Formen ist exakt? Berechnen Sie die Integrale von ω_1 bzw. ω_2 entlang der Kurve

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, ct)$$

mit $t \in [0, 2\pi]$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante.

Aufgabe 5. Es sei $\mathbf{v}$ ein konservatives Vektorfeld auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, d.h. es gebe eine Funktion $\Phi \in C^1(U)$, so daß $\mathbf{v}(p) = -\mathrm{grad}\ \Phi(p) \in T_pU$ für jedes $p \in U$.

Weiter sei $\gamma \in C^2([a,b], U)$ eine Kurve in U, die dem Newtonschen Bewegungsgesetz

$$\ddot{\gamma}(t) = \mathbf{v}(\gamma(t)), \quad t \in [a,b],$$

genügt. Man beweise den Energiesatz

$$\frac{1}{2}\|\dot{\gamma}(t)\|^2 + \Phi((\gamma(t)) \equiv \text{konst.}$$

Hinweis: Betrachten Sie $\Phi(\gamma(t_2)) - \Phi(\gamma(t_1))$ für $t_1, t_2 \in [a,b]$.

Abgabe: Freitag 22.6.12,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.