SS 2013

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Flächen

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß der Raum

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ z \geq 0\} \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ y = 0\ ,\ \ 0 \leq z \leq 1\}$$

mit der von $\mathbb{R}^3$ induzierten Topologie einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 2. Man fasse S^1 als den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ auf. Beschreiben Sie den Homomorphismus $f_*\colon\ \pi_1(S^1,1) \to \pi_1(S^1, f(1))$, wenn

(i) $f(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+\pi/2)}$,

(ii) $f(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ für $n \in \mathbb{Z}$,

(iii) $f(e^{i\theta}) = \begin{cases} e^{i\theta}, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ e^{i(2\pi-\theta)}, & \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$

Aufgabe 3. Der **komplex projektive Raum** $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ist definiert als der Quotientenraum von $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0,\ldots,0)\}$ (oder $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$) unter der Äquivalenzrelation

$$(z_0,\ldots,z_n) \sim (w_0,\ldots,w_n) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\colon\ (z_0,\ldots,z_n) = (\lambda w_0,\ldots,\lambda w_n)\ .$$

Die Äquivalenzklasse eines Punktes $(x_0,\ldots,x_n)$ bezeichnet man wie im reellen Fall mit **homogenen Koordinaten** $[z_0 : \ldots : z_n]$. Man kann $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ auch als den Raum der komplexen Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{C}^{n+1}$ auffassen.

Die **Ein-Punkt-Kompaktifizierung** $\widehat{\mathbb{C}}$ von $\mathbb{C}$ ist definiert als die Menge $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (d.h. die disjunkte Vereinigung aus $\mathbb{C}$ und einer Menge mit genau einem Element, das wir mit ∞ bezeichnen), mit der folgenden Topologie: Die offenen Mengen von $\widehat{\mathbb{C}}$ seien genau die offenen Teilmengen von $\mathbb{C} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ und die Mengen der Form $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ mit kompaktem $K \subset \mathbb{C}$.

Zeigen Sie:

(a) $\widehat{\mathbb{C}}$ ist tatsächlich ein kompakter topologischer Raum.

(b) $\widehat{\mathbb{C}}$ ist homöomorph zur 2-Sphäre S^2. Überlegen Sie sich dazu zum Beispiel, daß die stereographische Projektion

$$\mathbb{R}^3 \ni S^2 \setminus \{\text{Nordpol}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \equiv \mathbb{C}$$

zusammen mit der Vorschrift Nordpol $\mapsto \infty$ einen Homöomorphismus $S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ definiert.

(c) Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathrm{P}^1 & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{C}} \\ [z_0 : z_1] & \longmapsto & \begin{cases} z_1/z_0, & \text{falls } z_0 \neq 0 \\ \infty, & \text{falls } z_0 = 0 \end{cases} \end{array}$$

ist ein Homöomorphismus.

Aufgabe 4. Seien u und v Schleifen in einer topologischen Gruppe G mit Basispunkt e, dem Einselement von G. Sei $u * v$ die durch $u * v(s) = \mu(u(s), v(s))$, $s \in [0,1]$, definierte Schleife, wobei $\mu\colon\ G \times G \to G$ die Multiplikation in G bezeichnet. Zeigen Sie, daß

$$uv \simeq u * v \simeq vu \ \text{ rel } \{0,1\},$$

und folgern Sie daraus, daß $\pi_1(G, e)$ abelsch ist.

Bonusaufgabe. (a) Führen Sie die Details im Beweis des Satzes 5.4 der Vorlesung aus, d.h. zeigen Sie Wohldefiniertheit der Abbildung

$$u_{\#}[w] := [u^{-1}wu],$$

und verifizieren Sie die Punkte (i) und (ii) aus diesem Satz.

(b) Verifizieren Sie die Punkte (i)–(iii) aus Satz 5.6 der Vorlesung.

Knobelaufgabe. In der Vorlesung hatten wir eine Triangulierung der projektiven Ebene $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ mit zehn Dreiecken gesehen. Zeigen Sie, daß es keine Triangulierung mit weniger Dreiecken geben kann.

Hinweis: Sei e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten, und f die Anzahl der Dreiecke ('Flächen') in einer gegebenen Triangulierung von $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Sie dürfen verwenden, daß stets $e-k+f = 1$ gelten muß. (Diese Aussage über die sogenannte Euler-Charakteristik von $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ werden wir in der Vorlesung später diskutieren.) Man schreibe e_m für die Anzahl der Ecken, in denen m Kanten zusammentreffen. Beweisen Sie die Identitäten

$$2k = 3f \quad \text{und} \quad 2k = \sum_m m e_m,$$

und benutzen Sie diese, um die Behauptung zu folgern.

Abgabe: Montag 13.05.2013 bis 15:30 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik