SS 2013

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

# Flächen

Übungsblatt 11

**Aufgabe 1.** (a) Zeigen Sie, daß jede Möbius-Transformation

$$T\colon\ \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}},\quad z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

wobei $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ mit $ad-bc=1$, $T(-d/c) := \infty$, $T(\infty) := a/c$, eine stetige Abbildung bezüglich der Topologie der Ein-Punkt-Kompaktifizierung auf $\widehat{\mathbb{C}}$ ist (vergl. Übungsblatt 5, Aufgabe 3).

(b) Zeigen Sie, daß die Möbius-Transformation $T$ unter der üblichen Identifikation von $\widehat{\mathbb{C}}$ mit $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ (vergl. Übungsblatt 5) gegeben ist durch

$$[z:w] \longmapsto [az+bw : cz+dw].$$

Diese Darstellung hat den Vorteil, daß $-d/c \equiv [-d:c]$ und $\infty \equiv [1:0]$ nicht mehr als Ausnahmepunkte behandelt werden müssen.

(c) Verwenden Sie die Darstellung aus (b) um zu zeigen, daß $T$ ein Biholomorphismus der Riemannschen Fläche $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ ist.

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, daß die Möbius-Transformationen eine Gruppe bilden, und daß durch

$$\Big\{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\Big\} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ein Gruppenisomorphismus von der Gruppe der Möbius-Transformationen auf die projektive spezielle lineare Gruppe

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) := \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\pm\mathrm{id} = \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{C}^*\cdot\mathrm{id}$$

definiert wird.

**Aufgabe 3.** Gegeben seien drei verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Beschreiben Sie eine Möbius-Transformation, die $z_1$ auf 0, $z_2$ auf 1 und $z_3$ auf $\infty$ abbildet, für die drei Fälle $z_i = \infty$, $i = 1,2,3$.

b.w.

**Aufgabe 4.** (a) Verifizieren Sie, daß jede reelle Möbius-Transformation

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

d.h. mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$, die obere Halbebene $H \subset \mathbb{C}$ diffeomorph auf sich selbst abbildet.

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $z \mapsto -1/z$ eine Isometrie der hyperbolischen Ebene $H$ definiert.

**Bonusaufgabe.** Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen, daß jede Möbius-Transformation verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise abbildet.

**Bonusaufgabe.** Begründen Sie sorgfältig, daß jede Isometrie der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ notwendigerweise von der Form $p \mapsto Ap + b$ mit $A \in \mathrm{O}(2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$ ist.

Abgabe: Montag 1.07.2013 bis 15:30 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik