SS 2014 Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie II

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei M eine orientierte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß es zu je zwei Punkten $p, q \in M$ (wobei $p = q$ erlaubt ist) und jedem orientierungserhaltenden Isomorphismus $\phi : T_pM \to T_qM$ einen Diffeomorphismus f von M gibt mit $T_pf = \phi$.

Aufgabe 2. (a) Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Der Scheibensatz gilt auch (mit gleichem Beweis wie in der Vorlesung) für Einbettungen $\mathbb{R}^k \to M$, $k \leq m$, allerdings im allgemeinen nur bis auf Isotopie, nicht ambiente Isotopie. Geben Sie Beispiele von je zwei Einbettungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R} \to S^1$, die nicht ambient isotop sind.

(b) Eine Einbettung $f\colon\ S^{k-1} \to M$ heißt **unverknotet**, wenn f zu einer Einbettung von D^k erweitert. Zeigen Sie, daß eine Abbildung f genau dann unverknotet ist, wenn es eine Karte $h\colon\ U \to \mathbb{R}^n$ von M und eine Isotopie F von f gibt, so daß $h \circ F_1\colon\ S^{k-1} \to \mathbb{R}^n$ die Standardeinbettung $S^{k-1} \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 3. Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $f\colon\ M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $h = (x_1, \ldots, x_n)\colon\ U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von M. Die Matrix

$$\left(\frac{\partial^2(f \circ h^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(h(p))\right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

heißt **Hessesche** von f im Punkt p. Die Funktion f heißt **Morse-Funktion**, wenn die Hessesche von f in jedem kritischen Punkt von f vollen Rang hat. Zeigen Sie, daß diese Bedingung unabhängig von der Kartenwahl ist.

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe wollen wir das Lemma 8.12 aus der Vorlesung beweisen. Sei dazu $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$. Außerdem sei $0 \in \mathbb{R}^n$ ein kritischer Punkt von f.

(a) Zeigen sie mittels des Lemmas von Morse (Lemma 2.2 der Vorlesung), daß f in der Form

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$$

geschrieben werden kann, wobei man $h_{ij} = h_{ji}$ annehmen kann. Folgern Sie, daß dann $(h_{ij}(0))$ die Hessesche Matrix von f in 0 ist.

Ab jetzt sei 0 ein nicht-ausgearteter kritischer Punkt von f, d.h. die Hessesche Matrix $(h_{ij}(0))$ habe vollen Rang.

(b) Zeigen Sie, daß man durch einen linearen Koordinatenwechsel erreichen kann, daß $h_{11}(0) \neq 0$.

(c) Die Quadratwurzel $g := \sqrt{|h_{11}|}$ ist dann auf einer kleinen Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ definiert. Setze

$$\begin{aligned} u_i &= x_i \text{ für } i \neq 1, \\ u_1(x_1,\ldots,x_n) &= g(x_1,\ldots,x_n) \cdot \Big(x_1 + \sum_{i>1} x_i h_{1i}(x_1,\ldots,x_n)/h_{ii}(x_1,\ldots,x_n)\Big). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß man $(u_1,\ldots,u_n)$ in einer Umgebung von 0 als Koordinatenfunktionen verwenden kann, und daß f bezüglich dieser Koordinaten die Gestalt

$$f(u_1,\ldots,u_n) = \pm u_1^2 + \sum_{i,j>1} u_i u_j h_{ij}^*(u_1,\ldots,u_n)$$

besitzt.

(d) Wie muß man dieses Verfahren induktiv fortsetzen, um f in die Gestalt

$$v_1^2 + \cdots + v_k^2 - v_{k+1}^2 - \cdots - v_n^2$$

um 0 zu bringen? Zeigen Sie, daß die Zahl $0 \leq k \leq n$ in dieser Darstellung durch die gegebene Funktion f eindeutig bestimmt ist.

Abgabe: Mittwoch 30.04.14 in der Vorlesung.