SS 2014 Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie II

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Sei M eine geschlossene, differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß für jede geschlossene Untermannigfaltigkeit N von M der Kodimension p mit trivialem Normalenbündel eine differenzierbare Abbildung $f\colon M \to S^p$ existiert, die N als Urbild eines regulären Wertes besitzt.

Hinweis: Benutzen Sie eine Tubenumgebung.

Aufgabe 2. Der **Index** eines kritischen Punktes a einer Morse-Funktion f auf einer Mannigfaltigkeit M ist definiert als die Anzahl der negativen Eigenwerte der Hesseschen von f im Punkt a. Zeigen Sie, daß auf der projektiven Ebene $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, die man aus der Sphäre S^2 durch Identifizierung antipodaler Punkte erhält, durch

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathbb{R}\mathrm{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & [(x,y,z)] & \longmapsto & x^2+2y^2+3z^2 \end{array}$$

eine Morse-Funktion mit genau drei kritischen Punkten vom Index $0, 1$ bzw. 2 gegeben ist.

Aufgabe 3. Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon L \to N$ differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten M, N, L, so daß für jeden Punkt $p \in M$ und $q \in L$ mit $f(p) = g(q) = r \in N$ gilt

$$T_pf(T_pM) + T_qg(T_qL) = T_rN.$$

Zeigen Sie, daß das **Faserprodukt** von f und g, definiert als

$$\{(p,q) \in M \times L\colon\ f(p) = g(q)\},$$

eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $M \times L$ ist.

Aufgabe 4. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zwei Untermannigfaltigkeiten L_0 und $L_1 \subset M$ heißen **kobordant**, wenn es eine Untermannigfaltigkeit $S \subset M \times I$ gibt, so daß

$$\partial S = L_0 \times \{0\} \sqcup L_1 \times \{1\}.$$

(a) Zeigen Sie, daß Kobordanz eine Äquivalenzrelation definiert.

(b) Sei $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zusammenhängenden, geschlossenen Mannigfaltigkeiten M und N. Zeigen Sie:

(i) Die Menge der kritischen Werte von f ist kompakt.

(ii) Sind a and b reguläre Werte, die nahe genug beieinander liegen, so sind $f^{-1}(a)$ und $f^{-1}(b)$ kobordant.

Hinweis: Konstruieren Sie eine Homotopie F von f, die a als regulären Wert besitzt, so daß $F^{-1}(a)$ den gewünschten Kobordismus liefert.

(iii) Sind $f, g\colon M \to N$ homotope Abbildungen mit einem gemeinsamen regulären Wert a, so sind $f^{-1}(a)$ und $g^{-1}(a)$ kobordant.

(iv) Zeigen Sie, daß $f^{-1}(a)$ und $f^{-1}(b)$ für beliebige reguläre Werte a und b kobordant sind.

Abgabe: Mittwoch 7.05.14 in der Vorlesung.