SS 2014 Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie II

Übungsblatt 10

Eine Möglichkeit, exotische Sphären zu realisieren, sind die sogenannten **Brieskorn-Mannigfaltigkeiten**. Dies sind Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{C}^{n+1}$, die man als Durchschnitt einer Sphäre $S_r^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ mit einer Teilmenge der Form

$$\big\{(z_0,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^{n+1}\colon\ z_0^{a_0}+\dots+z_n^{a_n}=0\big\}$$

erhält, wobei $(a_0,\dots,a_n)$ ein $(n+1)$-Tupel von Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ ist. Ob der entstehende Raum tatsächlich homöomorph zu S^{2n-1} ist, hängt von der Wahl der a_j ab.

Auf diesem Übungsblatt betrachten wir eine spezielle Klasse von Brieskorn-Mannigfaltigkeiten und diskutieren einige ihrer topologischen Eigenschaften.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} z_0\overline{z}_0+\dots+z_n\overline{z}_n &= 2\\ z_0^d+z_1^2+\dots+z_n^2 &= 0 \end{aligned}$$

für jedes $d\in\mathbb{N}_0$ eine $(2n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^{n+1}$ definiert wird. Wir schreiben $W^{2n-1}(d)$ für diese Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß $W^{2n-1}(2)$ diffeomorph zum Raum der orthonormierten 2-Beine des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, d.h. zu

$$\big\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}\colon\ |\mathbf{x}|=|\mathbf{y}|=1,\ \langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=0\big\}.$$

Man nennt diesen Raum auch die **Stiefel-Mannigfaltigkeit** $V_{n+1,2}$. Alternativ kann man diesen Raum als das Einheitstangentialbündel von S^n interpretieren.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß $W^3(0)$ diffeomorph zu $S^1\times S^2$ ist.

Aufgabe 4. (a) Schreibe $\mathbf{z} := (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ in der Form $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathrm{i}\mathbf{y}$ mit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n+1)$ operiert auf $\mathbb{C}^{n+1}$ durch $(A, \mathbf{x} + \mathrm{i}\mathbf{y}) \mapsto A\mathbf{x} + \mathrm{i}A\mathbf{y}$. Zeigen Sie:

(i) Diese Wirkung überführt die Untermannigfaltigkeit $W^{2n-1}(2)$ in sich selbst und ist dort transitiv.

(ii) Der Stabilisator jedes Punktes in $W^{2n-1}(2)$ ist konjugiert zu $\mathrm{O}(n-1) \subset \mathrm{O}(n+1)$.

Hieraus ergibt sich, daß $W^{2n-1}(2)$ äquivariant diffeomorph zu $\mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n-1)$ ist.

(b) Für beliebiges $d \in \mathbb{N}_0$ können wir eine $\mathrm{O}(n)$-Wirkung auf $W^{2n-1}(d)$ wie folgt definieren. Schreibe $(z_0, z_1, \ldots, z_n) = (z_0, \mathbf{x} + \mathrm{i}\mathbf{y})$ mit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, und definiere die Wirkung durch $\big(A, (z_0, \mathbf{x} + \mathrm{i}\mathbf{y})\big) \mapsto (z_0, A\mathbf{x} + \mathrm{i}A\mathbf{y})$. Zeigen Sie:

(i) Dies definiert in der Tat eine Wirkung auf $W^{2n-1}(d)$.

(ii) Zwei Punkte $(z_0, \ldots, z_n)$ und $(z'_0, \ldots, z'_n)$ aus $W^{2n-1}(d)$ liegen genau dann in der selben Bahn der $\mathrm{O}(n)$-Wirkung, wenn $z_0 = z'_0$.

(iii) Es gilt die Beziehung

$$|z_0|^{2d} = (2 - z_0\overline{z}_0)^2 - 4\big(|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2\big).$$

Als Bonusaufgabe dürfen Sie sich überlegen, wie man mittels (iii) zeigen kann, daß der Orbitraum $W^{2n-1}(d)/\mathrm{O}(n)$ die Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| \leq 1\}$ ist. Aus der Bestimmung des Stabilisators in Abhängigkeit von z kann man dann auf den Diffeomorphietyp von $W^{2n-1}(d)$ schließen.

Abgabe: Mittwoch 25.06.14 in der Vorlesung.