Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie II

Übungsblatt 11

In der Vorlesung haben wir die Klassifikation exotischer Sphären übersetzt in die Bestimmung der Gruppe $\Gamma_m = \mathrm{Diff}(S^{m-1})/\partial\mathrm{Diff}(D^m)$. Auf diesem Übungsblatt wollen wir uns einige Aussagen ansehen, die die Komplexität von Diffeomorphismengruppen illustrieren.

Aufgabe 1. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} f_n\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \theta & \longmapsto & \theta + \dfrac{2\pi}{n} + \dfrac{1}{2^n}\,\sin^2\big(\dfrac{n\theta}{2}\big). \end{array}$$

(a) Zeigen Sie, daß f_n einen Diffeomorphismus $S^1 \to S^1$ induziert, wobei $S^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

(b) Sei $g\colon S^1 \to S^1$ ein Diffeomorphismus von S^1. Eine **periodische Bahn** von g der Länge $k \in \mathbb{N}$ ist eine Teilmenge $\{\theta, g(\theta), \ldots, g^{k-1}(\theta)\}$ mit $g^k(\theta) = \theta$ und $g^j(\theta) \neq \theta$ für $j < k$. Eine periodische Bahn der Länge 1 ist also einfach ein Fixpunkt. Zeigen Sie:

- (i) Je zwei periodische Bahnen von g sind disjunkt oder identisch.
- (ii) Jede periodische Bahn von g mit ungerader Länge ist auch eine periodische Bahn der gleichen Länge für $g \circ g$.
- (iii) Eine periodische Bahn von g der Länge $2k$ liefert zwei disjunkte periodische Bahnen der Länge k von $g \circ g$.
- (iv) Falls $g \circ g$ eine endliche Anzahl periodischer Bahnen von gerader Länge besitzt, so ist diese Anzahl gerade.

(c) Zeigen Sie, daß es für gerades n keinen Diffeomorphismus g von S^1 mit $g \circ g = f_n$ gibt. Überlegen Sie sich dazu, daß f_n genau eine periodische Bahn der Länge n hat.

Zur Erinnerung: Die Exponentialabbildung $\exp\colon TM \to M$ einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist definiert durch $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$, wobei γ_v die durch $\gamma_v(0) = p$ und $\dot\gamma_v(0) = v \in T_pM$ eindeutig definierte Geodätische ist.

Aufgabe 2. (a) Geben Sie eine Identifikation der glatten Vektorfelder X auf S^1 mit den glatten 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ an, so daß die Exponentialabbildung $TS^1 \to S^1$ (bzgl. der Standardmetrik auf S^1) gegeben ist durch $\exp_\theta(X) = \theta + X(\theta) \bmod 2\pi$.

(b) Sei X ein glattes Vektorfeld auf einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie, daß die Abbildung $M \to M$ gegeben duch $p \mapsto \exp_p(X(p))$ i.a. kein Diffeomorphismus von M ist.

Aufgabe 3. Auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M läßt sich alternativ eine Exponentialabbildung vom Raum $\Gamma(TM)$ der glatten Vektorfelder auf M in die Diffeomorphismengruppe $\mathrm{Diff}(M)$ wie folgt definieren. Sei $X \in \Gamma(TM)$ und ϕ_t der global definierte Fluß von X. Setze $\exp(X) := \phi_1$. Zeigen Sie:

(a) Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit stimmt diese Exponentialabbildung i.a. nicht mit der in Aufgabe 2 beschriebenen Exponentialabbildung überein, selbst dann, wenn jene einen Diffeomorphismus liefert.

(b) Für das konstante Vektorfeld auf S^1, das wir nach Aufgabe 2 als $X(\theta) = \theta_0$ beschreiben können, stimmen die beiden Definitionen der Exponentialabbildung überein und liefern beide die Rotation R_{θ_0} um den Winkel θ_0.

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, daß die Abbildung $\exp\colon \Gamma(TM) \to \mathrm{Diff}(M)$ nicht lokal surjektiv ist nahe id_M, obwohl das Differential von exp im Nullschnitt $\mathbf{0} \in \Gamma(TM)$ gleich der Identität ist. (Ein unendlich-dimensionaler Satz über implizite Funktionen gilt also nicht ohne weiteres.)

(a) Es gilt $T_{\mathbf{0}}\Gamma(TM) = \Gamma(TM)$, da $\Gamma(TM)$ ein Vektorraum ist. Der Tangentialraum von $\mathrm{Diff}(M)$ in id_M kann in natürlicher Weise mit $\Gamma(TM)$ identifiziert werden. Zeigen Sie, daß für $\mathbf{h} \in \Gamma(TM)$ gilt:

$$\frac{d}{ds}|_{s=0} \exp(\mathbf{0} + s\mathbf{h})(p) = \mathbf{h},$$

und daher in der Tat $T_{\mathbf{0}} \exp = \mathrm{id}_{\Gamma(TM)}$.

(b) Sei jetzt X ein glattes Vektorfeld auf S^1 und $f = \exp(X)$. Angenommen, f ist konjugiert zu einer Rotation, d.h.

$$g \circ f = R_{\theta_0} \circ g$$

für ein geeignetes $\theta_0 \in \mathbb{R}$ und ein $g \in \mathrm{Diff}(S^1)$. Schreibe ϕ_t für den Fluß von X und ϕ_t^0 für den Fluß von θ_0. Dann gilt die Gleichung

$$g \circ \phi_t = \phi_t^0 \circ g$$

also für $t = 0$ und $t = 1$. Nehmen wir einmal an, die Gleichung gilt für alle t. Zeigen Sie durch Differentiation in $t = 0$, daß $Tg(X(p)) = \theta_0(g(p)) \in T_{g(p)}S^1$ für jeden Punkt $p \in S^1$. Wenn wir X als glatte 2π-periodische Funktion auf $\mathbb{R}$ und g als 2π-äquivarianten Diffeomorphismus von $\mathbb{R}$ auffassen, können wir dies als $g'(x) \cdot X(x) = \theta_0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ lesen.

(c) Sei zusätzlich zu den Annahmen in (b) angenommen, daß f keine Fixpunkte hat. Zeigen Sie, daß dann

$$g(x) = g(0) + \int_0^x \frac{\theta_0}{X(s)}\, ds$$

gilt.

(d) Wir gehen erneut von der Annahme $f = \exp(X)$ und f fixpunktfrei aus. Motiviert durch die Überlegungen aus (b) und (c) setzen wir

$$g(x) := \int_0^x \frac{\theta_0}{X(s)}\, ds,$$

wobei wir $\theta_0 \in \mathbb{R}$ so wählen, daß $g(2\pi) = 2\pi$. Zeigen Sie, daß g einen orientierungstreuen Diffeomorphismus von S^1 induziert, und daß $g \circ f = R_{\theta_0} \circ g$. Folgern Sie mit Aufgabe 1, daß f_n für großes n nicht im Bild von exp liegen kann.

Abgabe: Mittwoch 2.07.14 in der Vorlesung.