SS 2014

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie II

Übungsblatt 12

Als n-**Zelle** bezeichnet man einen topologischen Raum, der homöomorph zu einer offenen n-Scheibe ist. Eine **Zellenzerlegung** eines topologischen Raumes X ist eine Menge

$$\mathcal{E} = \{e^n_\lambda \subset X \colon\ n \in \mathbb{N}_0,\ \lambda \in \Lambda_n\}$$

von n-Zellen e^n_λ, so daß

$$X = \bigsqcup_{n,\lambda} e^n_\lambda.$$

Man bezeichnet die Menge

$$X^{(n)} := \bigcup_{k \le n, \lambda \in \Lambda_k} e^k_\lambda$$

als n-**Skelett**. Ein Hausdorff-Raum X mit Zellenzerlegung $\mathcal{E}$ heißt **CW-Komplex**, falls gilt:

(i) Für jede n-Zelle $e^n_\lambda \in \mathcal{E}$ gibt es eine stetige Abbildung $f_\lambda \colon D^n \to X$, die sogenannte **charakteristische Abbildung**, mit

$$f_\lambda|_{\mathring{D}^n} \colon \mathring{D}^n \xrightarrow{\cong} e^n_\lambda \quad \text{und} \quad f_\lambda(S^{n-1}) \subset X^{(n-1)}.$$

(ii) (**C**losure finiteness) Der Abschluß $\bar{e}$ jeder Zelle $e \in \mathcal{E}$ schneidet nur endlich viele Zellen.

(iii) (**W**eak topology) Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $A \cap \bar{e}$ abgeschlossen ist für jede Zelle $e \in \mathcal{E}$.

Aufgabe 1. (a) Geben Sie zwei verschiedene CW-Zerlegungen der 2-Sphäre S^2 an.

(b) Geben Sie eine CW-Zerlegung des Torus T^2an.

(c) Geben Sie eine CW-Zerlegung von $T^2 \# T^2$ an, die nur eine 2-Zelle verwendet.

Aufgabe 2. Ein **Unterkomplex** A eines CW-Komplexes X ist ein abgeschlossener Unterraum, der aus Zellen von X zusammengesetzt ist. Ein **CW-Paar** (X, A) besteht aus einem CW-Komplex X und einem Unterkomplex A.

Sei nun M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand und $f \colon\ M \to (-\infty, a]$ eine Morsefunktion mit regulärem Wert a und $f^{-1}(a) = \partial M$. (Wie findet man eine solche Funktion?) Zeigen Sie:

(a) Falls f genau k_i kritische Punkte vom Index i besitzt, so ist M vom Homotopietyp eines endlichen CW-Komplexes mit genau k_i Zellen der Dimension $i = 0, \ldots, n$.
(Begründen Sie kurz, wie Satz 5 aus Abschnitt 11.3 auf beliebige Dimensionen verallgemeinert.)

(b) $(M, \partial M)$ hat den Homotopietyp eines CW-Paares der Dimension $\leq n$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die Funktion $g\colon\ \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$g[z_0 : \ldots : z_n] = \frac{\sum \lambda_j |z_j|^2}{\sum |z_j|^2},$$

wobei die λ_j verschiedene positive Zahlen sind, eine Morse-Funktion des Typs $(1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, 1)$ ist. Daher ist $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ vom Homotopietyp eines endlichen CW-Komplexes mit einer Zelle in jeder geraden Dimension.

Bemerkung: Mittels dieses Ergebnisses lassen sich die Homologiegruppen von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ berechnen:

$$H_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & , \quad k = 0, 2, 4, \ldots, 2n \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 4. Analog zu Aufgabe 3 definiert man eine Morse-Funktion $f\colon\ \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$f[x_0 : \ldots : x_n] = \frac{\sum \lambda_j x_j^2}{\sum x_j^2}.$$

(a) Zeigen Sie, daß f eine Morse-Funktion vom Typ $(1, 1, \ldots, 1)$ ist. (Die Homologie von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ läßt sich hieraus nicht direkt erschließen.)

(b) Skizzieren Sie für $n = 1, 2, 3$ die kritischen Punkte und die Niveaumengen der Komposition

$$S^n \xrightarrow{p} \mathbb{R}\mathrm{P}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

wobei p die übliche doppelte Überlagerung ist, d.h. $p(x_0, \ldots, x_n) = [x_0 : \ldots : x_n]$.

Abgabe: Mittwoch 9.07.14 in der Vorlesung.