SS 2015

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis II

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Es sei $X = \mathbb{R} \cup \{*\}$ die Vereinigung von $\mathbb{R}$ mit einem zusätzlichen Punkt $*$. Wir nennen eine Teilmenge $U \subset X$ offen, falls sie eine der folgenden Eigenschaften hat:

(i) $U \subset \mathbb{R}$ ist offen in der üblichen Topologie von $\mathbb{R}$,

(ii) $U = \bigl(V \setminus \{0\}\bigr) \cup \{*\}$ mit $V \subset \mathbb{R}$ offen und $0 \in V$,

(iii) $U = V \cup \{*\}$ mit $V \subset \mathbb{R}$ offen und $0 \in V$.

Zeigen Sie:

(a) Dies definiert eine Topologie auf X, die nicht Hausdorffsch ist. Insbesondere ist diese Topologie nicht metrisch.

(b) Die Folge $x_n = 1/n$ konvergiert in X. Was sind die möglichen Grenzwerte?

Aufgabe 2. Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **Homöomorphismus**, falls f bijektiv und die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon Y \to X$ ebenfalls stetig ist.

(a) Sei $f\colon X \to Y$ eine bijektive stetige Abbildung, wobei X ein kompakter Raum und Y ein Hausdorff-Raum ist. Zeigen Sie, daß f dann ein Homöomorphismus ist.

(b) Wir geben den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ die von $\mathbb{R}$ induzierte Topologie. Eine Abzählung von $\mathbb{Q}$ liefert eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, daß jede solche Abzählung stetig ist, aber niemals ein Homöomorphismus.

Aufgabe 3. Sei (M, d) ein metrischer Raum und P ein Punkt in M. Man definiere $d_P(x, x) = 0$ und $d_P(x, y) = d(x, P) + d(P, y)$ für $x, y \in M$, $x \neq y$.

(a) Zeigen Sie, daß dies eine Metrik d_P auf M definiert.

(b) Man nennt d_P die 'französische Eisenbahnmetrik' – warum?

(c) Sei (x_k) eine Folge in M. Zeigen Sie (bezüglich der Metrik d_P):

  (i) $\lim x_k = a \neq P$ genau dann, wenn $x_k = a$ für fast alle k;

  (ii) $\lim x_k = P$ genau dann, wenn $d(x_k, P) \to 0$.

Machen Sie sich die Aufgabe evtl. erst am $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik d klar.

Aufgabe 4. Es sei $\|.\|_\infty$ die Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup\big\{|f(x)| \colon\, x \in [a,b]\big\}$$

auf dem Vektorraum $W := C^0([a,b])$ der stetigen Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$. Auf dem Vektorraum $V := C^1([a,b])$ der stetig differenzierbaren Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Zeigen Sie:

(a) Dies definiert eine Norm auf V.

(b) Bezüglich dieser Norm ist V ein Banachraum.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, daß eine Cauchy-Folge (f_k) bzgl. $\|.\|_\infty$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, die außerdem stetig ist, falls die f_k stetig sind (vergl. Bonusaufgabe unten). Sei also (f_k) eine Cauchy-Folge in V, und $f \in W$ (sic!) der gleichmäßige Limes dieser Folge. Sei weiter $g \in W$ der gleichmäßige Limes der Folge (f_k'). Zeigen Sie durch Betrachten des Integrals

$$\int_a^x g(t)\, dt,$$

daß $f \in V$ und $f' = g$. Dazu benötigen Sie aus der Analysis I den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, und die Vertauschbarkeit von Limes und Integral bei gleichmäßiger Konvergenz.

(c) Die Abbildung $V \to W$, $f \mapsto f'$ ist stetig.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie anhand des in der Vorlesung skizzierten Leitfadens, daß der Raum $C^0([a,b])$ der stetigen Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$ bezüglich der durch die Supremumsnorm definierten Metrik ein Banachraum ist.

Abgabe: Mittwoch, 22.04.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).