SS 2015

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis II

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. (a) Skizzieren Sie die Kurve in der Ebene, die durch die Gleichung $|x|^{2/3}+|y|^{2/3}=1$ beschrieben wird.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung für einen vollen Umlauf dieser Kurve an, und berechnen Sie damit die Bogenlänge der Kurve.

Aufgabe 2. Sei D eine offene Menge im $\mathbb{R}^3$ und $v=(v_1,v_2,v_3)\colon\ D\to\mathbb{R}^3$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld, d.h. die Komponentenfunktionen $v_1,v_2,v_3\colon\ D\to\mathbb{R}$ seien partiell differenzierbar. Die **Rotation** von v ist das Vektorfeld $\operatorname{rot} v\colon\ D\to\mathbb{R}^3$, definiert durch

$$(\operatorname{rot} v)(x) := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}(x)-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(x)-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x)-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x)\right), \quad x\in D$$

(formal kann man die Rotation als Kreuzprodukt interpretieren: $\operatorname{rot} v=\nabla\times v$). Die **Divergenz** von v ist die Funktion $\operatorname{div} v\colon\ D\to\mathbb{R}$, definiert (wie schon in der Vorlesung) durch

$$(\operatorname{div} v)(x) := \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x)+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x)+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x), \quad x\in D$$

(formal $\operatorname{div} v=\langle\nabla, v\rangle$).

Seien v und $f\colon\ D\to\mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)=0$

(b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v)=0$

(c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} v) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} v)-(\triangle v_1,\triangle v_2,\triangle v_3)$, wobei $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ der **Laplace-Operator** ist.

Dabei darf verwendet werden, daß bei einer zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktion die partiellen Ableitungen miteinander kommutieren, d.h. ist $f\colon\ D\to\mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$. (Dies wird in der Vorlesung noch gezeigt.)

Aufgabe 3. (a) Eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei bezüglich der kanonischen Basen durch eine $(m \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ gegeben. Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|Ax| \leq \sqrt{nm} \cdot \max_{i,j} |a_{ij}| \cdot |x|.$$

Hinweis: Wenden Sie die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung auf $\sum_j a_{ij}x_j$ an.

(b) Seien V, W normierte Vektorräume und $L\colon\ V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, daß L genau dann stetig ist, wenn es eine Konstante $C \in \mathbb{R}^+$ gibt, so daß

$$|L(x)| \leq C\,|x|$$

für alle $x \in V$.

Mit (a) sehen wir, daß lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen stetig sind.

Aufgabe 4. Der Vektorraum $\mathcal{M}$ aller $(n \times n)$-Matrizen kann mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert werden, der Vektorraum $\mathcal{S}$ der *symmetrischen* $(n \times n)$-Matrizen (d.h. Matrizen $A \in \mathcal{M}$ mit $A^{\mathsf{t}} = A$) mit $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, indem man z.B. die Einträge a_{ij} mit $i \leq j$, d.h. auf und oberhalb der Diagonale, als Koordinaten nimmt.

Durch $A \mapsto A^{\mathsf{t}}A$ ist eine Abbildung $f\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{S}$ definiert.

(a) Zeigen Sie, daß f differenzierbar ist, und daß das Differential $d_A f$ gegeben ist durch $d_A f(h) = A^{\mathsf{t}}h + h^{\mathsf{t}}A \in \mathcal{S}$.

(b) Sei E die $(n \times n)$-Einheitsmatrix. Zeigen Sie, daß $d_A f\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{S}$ in jedem Punkt $A \in \mathrm{O}(n)$ der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(n) := f^{-1}(E) \subset \mathcal{M}$ surjektiv ist.

Bemerkung: Wir werden später sehen, daß man aufgrund dieser Informationen die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n)$ als sogenannte *Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^{n^2}$ der Dimension $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$ interpretieren kann.

Abgabe: Mittwoch, 06.05.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).