SS 2015

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis II

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f überall zweimal partiell differenzierbar ist und berechnen Sie explizit die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0).$$

Gilt $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Ist f im Nullpunkt stetig?

Aufgabe 2. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^6} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß im Punkt $(0,0)$ alle Richtungsableitungen existieren. Ist f dort differenzierbar?

Aufgabe 3. (a) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Bekanntlich nennen wir eine Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $a \in D$, wenn es eine lineare Abbildung (bzw. eine $(m \times n)$-Matrix) $J_f(a)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so daß

$$f(a+h) = f(a) + J_f(a) \cdot h + \varphi(h)$$

mit $\varphi(h) = o(|h|)$. Zeigen Sie, daß dies äquivalent zu der folgenden Aussage ist: Es gibt eine Abbildung A von D in den Raum der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, so daß

$$f(x) = f(a) + A(x) \cdot (x - a),$$

und zwar so, daß A in a stetig ist mit dem Wert $A(a) = J_f(a)$.

Hinweis: Um aus der ersten die zweite Definition zu erhalten, schreibe $x = a + h$ und

$$\varphi(h) = \langle h, \frac{h}{|h|}\rangle \cdot \frac{\varphi(h)}{|h|}$$

für $h \neq 0$, und definiere damit für jedes $x \in D$ die lineare Abbildung $v \mapsto A(x) \cdot v$ geeignet. Für die andere Richtung argumentiere wie in der Vorlesung im Fall $m = n = 1$.

b.w.

(b) Benutzen Sie die alternative Darstellung einer differenzierbaren Abbildung aus (a) um die Kettenregel zu beweisen, analog zum Argument aus der Analysis I.

Aufgabe 4. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Interpretation der Divergenz eines Vektorfeldes als *Quellstärke* zu verstehen. Dazu sei ein differenzierbares Vektorfeld $v = (v_1, \dots, v_n)$ auf dem $\mathbb{R}^n$ gegeben. Im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir den achsenparallelen Würfel der Kantenlänge $\varepsilon > 0$, d.h. das Parallelepiped, das von den Vektoren εe_i, $i = 1, \dots, n$, im Punkt a aufgespannt wird.

Nun lassen wir diesen Würfel unter dem Einfluß von v 'fließen'. Dies bedeutet, daß sich jeder Punkt auf einer Bahn γ bewegt, deren Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$ in jedem gegebenen Bahnpunkt $\gamma(t)$ gleich dem Vektor $v(\gamma(t))$ ist.

Für kleine Zeiten t ergibt sich in erster Näherung, daß sich der Eckpunkt a des Würfels nach $a + tv(a)$ bewegt, die Eckpunkte $a + \varepsilon e_i$ nach $a + \varepsilon e_i + tv(a + \varepsilon e_i)$. Wir erhalten also ein neues Parallelepiped, das von den Vektoren

$$u_i(\varepsilon, t) := \varepsilon e_i + t\big(v(a + \varepsilon e_i) - v(a)\big), \quad i = 1, \dots, n,$$

aufgespannt wird.

Nun endlich zur Aufgabenstellung: Sei $V_\varepsilon(t)$ das Volumen dieses Parallelepipeds, d.h.

$$V_\varepsilon(t) = \det\big(u_1(\varepsilon, t), \dots, u_n(\varepsilon, t)\big),$$

wobei wir die $u_i(\varepsilon, t)$ als Spaltenvektoren einer $(n \times n)$-Matrix auffassen. Berechnen Sie $V_\varepsilon'(0)$, und zeigen Sie, daß

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V_\varepsilon'(0)}{V_\varepsilon(0)} = \operatorname{div} v(a).$$

Die Divergenz ist also in der Tat ein Maß dafür, wie sich ein 'infinitesimales' Volumen unter dem 'Fluß' des Vektorfeldes ausdehnt (bei positiver Divergenz) oder zusammenzieht (bei negativer Divergenz).

Abgabe: Mittwoch, 13.05.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).