SS 2015

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis II

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_0^a t^3 e^{t^2}\,dt$ auf beide der folgenden Weisen:

(a) durch partielle Integration,

(b) durch Betrachten der Funktion $F(x) = \int_0^a te^{xt^2}\,dt$.

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe wollen wir an einem Beispiel zeigen, daß die Existenz der iterierten Integrale nicht ausreicht, um den Satz von Fubini zu gewährleisten, daß also eine Bedingung wie die Stetigkeit des Integranden auf dem abgeschlossenen Rechteck unerläßlich ist.

(a) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx$, wobei y ein reeller Parameter im offenen Intervall $(0,1)$ ist.

(b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx \right) dy,$$

d.h. den Grenzwert

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx \right) dy.$$

(c) Zeigen Sie, möglichst ohne weiteres Rechnen, daß

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy \right) dx.$$

Aufgabe 3. (a) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon\ D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Weiter seien $a, b \in D$ derart, daß das gesamte Segment

$$[a,b] := \{a + t(b-a)\colon\ t \in [0,1]\}$$

in D liegt. Zeigen Sie den folgenden **Mittelwertsatz**: Es gibt ein $c \in (a,b)$ mit

$$f(b) - f(a) = \langle \operatorname{grad} f(c), b-a \rangle.$$

Hinweis: Wenden Sie die Kettenregel und den Mittelwertsatz der 1-dimensionalen Differentialrechnung auf die Funktion $\phi(t) = f(a + t(b-a))$ an.

(b) Seien D, a, b wie in (a), aber jetzt $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$. Setze $h := b - a$. Zeigen Sie, daß

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 J_f(a + th)\,dt \cdot h.$$

Beachten Sie, daß das Integral eine $(m \times n)$-Matrix liefert.

b.w.

Aufgabe 4. Gegeben sei eine stetig partiell differenzierbare Funktion

$$g\colon [a,b]\times[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,t) \longmapsto g(x,t),$$

mit deren Hilfe eine Funktion $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(x,t)\,dt$ definiert wird. Zeigen Sie, daß G differenzierbar ist, und daß folgende Gleichung gilt:

$$G'(x) = g(x,x) + \int_a^x \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Bonusaufgabe. Wir wollen zeigen, daß auf dem Vektorraum $\mathcal{M}$ der reellen $(m \times n)$-Matrizen durch

$$\|A\| := \max\bigl\{|Ax|\colon\ x \in \mathbb{R}^n,\ |x| = 1\bigr\}$$

eine Norm definiert ist. Hier bezeichnet $|\,.\,|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$.

(a) Warum existiert dieses Maximum für eine gegebene $(m \times n)$-Matrix A?

(b) Zeigen Sie, daß $|Ax| \le \|A\| \cdot |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(c) Überprüfen Sie, daß die Eigenschaften einer Norm erfüllt sind:

(N1) $\|A\| \ge 0$, mit Gleichheit nur für die Nullmatrix.

(N2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

(N3) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$ für alle $A, B \in \mathcal{M}$.

(d) Oft arbeitet man auch mit der euklidischen Norm $|A| := \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$ oder der Maximumsnorm $|A|_\infty := \max\{|a_{ij}|\colon\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$. Hier gelten analoge Aussagen. Beweisen Sie die Abschätzungen

$$|A|_\infty \le \|A\| \le \sqrt{mn}\,|A|_\infty.$$

In Kombination mit Aufgabe 3 sehen wir: Wenn eine obere Schranke für die Matrixnorm von J_f auf dem Geradensegment zwischen a und b bekannt ist, so läßt sich $|f(b) - f(a)|$ nach oben abschätzen.

Abgabe: Mittwoch, 20.05.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).