SS 2015 Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis II

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. (a) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$$

definiert ist. Skizzieren Sie die Höhenlinien, das Gradientenvektorfeld, und den Graphen dieser Funktion. Die durch den Graphen gegebene Fläche im $\mathbb{R}^3$ wird als *Affensattel* bezeichnet — warum?

(b) Das folgende Beispiel von Peano zeigt, daß eine Funktion auf dem $\mathbb{R}^2$ in einem Punkt p kein lokales Minimum haben muß, selbst wenn ihre sämtlichen Beschränkungen auf die Geraden durch p dort lokale Minima haben.

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Zeigen Sie, daß gilt:

(i) Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (0,0)$, hat die Funktion $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(t) := f(at, bt)$ in $t = 0$ ein isoliertes lokales Minimum.

(ii) Die Funktion f hat in $(0,0)$ kein lokales Minimum. Wo gilt $f > 0$, wo $f < 0$?

Aufgabe 2. Für eine stetige vektorwertige Funktion $v = (v_1, \ldots, v_n)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist das Integral definiert durch

$$\int_a^b v(t)\,dt := \Big(\int_a^b v_1(t)\,dt, \ldots, \int_a^b v_n(t)\,dt\Big).$$

Es bezeichne $|\,.\,|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß

$$\Big|\int_a^b v(t)\,dt\Big| \leq \int_a^b |v(t)|\,dt.$$

Hinweis: Für $w \in \mathbb{R}^n$ gilt aufgrund der Linearität des Integrals

$$\Big\langle \int_a^b v(t)\,dt, w \Big\rangle = \int_a^b \langle v(t), w\rangle\,dt.$$

Aufgabe 3. (a) Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x,y) = \begin{cases} y - x^2 & \text{für } y \geq x^2, \\ \dfrac{y^2}{x^2} - y & \text{für } 0 \leq y \leq x^2, \end{cases}$$

und $g(x,-y) = -g(x,y)$ für $y > 0$.

Zeigen Sie, daß g auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, aber nicht überall stetig differenzierbar.

b.w.

(b) Die differenzierbare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f(x,y) = (x, g(x,y))$. Zeigen Sie, daß die Jacobische Matrix von f in $(0,0)$ die Einheitsmatrix ist.

(c) Zeigen Sie, daß es in jeder Umgebung von $(0,0)$ Punkte $(x,y) \neq (x',y')$ mit $f(x,y) = f(x',y')$ gibt.

Diese Aufgabe zeigt, daß der Satz über lokale Diffeomorphismen falsch ist, wenn man statt stetiger Differenzierbarkeit nur Differenzierbarkeit fordert.

Aufgabe 4. (a) Sei (M,d) ein metrischer Raum und x^* ein Punkt in M. Zeigen Sie, daß durch $x \mapsto d(x,x^*)$ eine stetige Abbildung $M \to \mathbb{R}$ definiert wird.

(b) Es sei $\Phi\colon M \to M$ eine kontrahierende Abbildung des nun als vollständig angenommenen metrischen Raumes. Die Kontraktionskonstante sei $\lambda \in [0,1)$, d.h.

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq \lambda \cdot d(x,y).$$

Wie im Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes wählen wir $x_0 \in M$ beliebig und definieren die Folge (x_n) durch $x_n = \Phi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Wie wir gezeigt haben, konvergiert diese Folge gegen den eindeutigen Fixpunkt z der Abbildung Φ. Beweisen Sie die folgende Fehlerabschätzung:

$$d(z, x_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d(x_1, x_0).$$

Dies erlaubt eine Kontrolle darüber, nach wie vielen Schritten man die Iteration bei vorgegebener Fehlertoleranz abbrechen kann.

(c) Sei $f \in C^2([a,b])$, und es gelte

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0, \quad f' > 0 \text{ und } f'' > 0 \text{ auf } [a,b].$$

Für einen Startwert x_0 definieren wir die Folge (x_n) rekursiv, wie in der Vorlesung geometrisch motiviert, durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Zeigen Sie:

(i) Die Funktion f besitzt eine eindeutige Nullstelle $z \in [a,b]$.

(ii) Für $x_0 = b$ konvergiert die Folge (x_n) streng monoton fallend gegen z. Verifizieren Sie insbesondere, daß die Folge nicht aus $[a,b]$ hinausführt.

(iii) Startet man mit $x_0 = a$, und gilt $x_1 \in [a,b]$, so ist die Folge ab $n = 1$ streng monoton fallend.

(iv) Das Verfahren konvergiert quadratisch, d.h. es gibt eine Konstante $c > 0$, so daß

$$|x_{n+1} - z| \leq c\,|x_n - z|^2.$$

Hinweis: Verwenden Sie für die Aufgabenteile (ii)-(iv) in geeigneter Weise eine Taylor-Entwicklung von f.

Abgabe: Mittwoch, 03.06.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).