SS 2015 Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis II

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\alpha\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie ein (wenn möglich reelles) Lösungsfundamentalsystem $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ der folgenden Differentialgleichungen:

(a)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} x, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

mit Anfangsbedingungen $\alpha_i(0) = e_i$, $i = 1, 2, 3$, wobei (e_1, e_2, e_3) die kanonische Basis von $\mathbb{C}^3$ bezeichnet.

(b)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

(c)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Aufgabe 3. (a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a, b \in C^0(I)$. Sei $\alpha\colon\ I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0,$$

mit $\alpha(t) \neq 0$ auf einem Teilintervall $J \subset I$. Zeigen Sie, daß man auf J eine zweite von α linear unabhängige Lösung $\beta\colon\ J \to \mathbb{R}$ findet in der Form $\beta(t) = \alpha(t)u(t)$, wobei u eine nichtkonstante Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{u} + \left(2\,\frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} + a(t)\right)\dot{u} = 0$$

ist.

(b) Finden Sie eine Lösung α der Gleichung

$$\ddot{x} - \frac{1}{2t}\,\dot{x} + \frac{1}{2t^2}\,x = 0$$

auf $\mathbb{R}^+$ durch einen linearen Ansatz $\alpha(t) = mt + c$. Verwenden Sie (a), um eine von α linear unabhängige Lösung zu finden.

Aufgabe 4. (a) Verwenden Sie die Beziehung zwischen Differentialgleichungen der Ordnung n auf $\mathbb{R}$ und Differentialgleichungen erster Ordnung auf $\mathbb{R}^n$ um zu zeigen, daß sich der Lösungsansatz für inhomogene lineare Differentialgleichungen auf $\mathbb{R}^n$ wie folgt in ein Lösungsverfahren der inhomogenen Gleichung

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0 x = b(t) \qquad (\star)$$

übersetzt, wobei $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $b \in C^0(\mathbb{R})$ gegeben seien:

Ist $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ein Lösungsfundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0 x = 0,$$

so ist $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ eine Lösung von $(\star)$, wobei die Funktionen $u_i \in C^1(\mathbb{R})$ mittels der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \dot{\alpha}_1 & \ldots & \dot{\alpha}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{(n-1)} & \ldots & \alpha_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

gefunden werden.

(b) Finden Sie mittels des in (a) beschriebenen Verfahrens eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A e^{i\omega_0 t},$$

wobei $A, \omega, \omega_0 \in \mathbb{R}^+$ gegeben seien. Beschreiben Sie das unterschiedliche qualitative Verhalten der Lösung, je nachdem ob $\omega_0 = \omega$ oder $\omega_0 \neq \omega$.

Abgabe: Mittwoch, 01.07.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).