

Analysis II

Übungsblatt 12

Lösungen zu den Aufgaben 1, 9, 11, 12 und 15 (iii) können abgegeben werden; damit können Sie Bonuspunkte für die Klausurzulassung erlangen. Die anderen Aufgaben werden in der Vorlesung besprochen. Auch hier ist der Lernerfolg aber größer, wenn Sie sich schon vorher mit den Aufgaben beschäftigt haben.

Hinweise zur Klausur am 31. Juli (Eingrenzung der Themen, Struktur der Klausur, ...) finden Sie demnächst auf der Internetseite der Vorlesung.

Aufgabe 1. Für $M \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$d(x, M) := \inf\{|x - y| : y \in M\}$$

der Abstand des Punktes x von M . Für $\varepsilon > 0$ setze

$$M_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, M) \leq \varepsilon\}.$$

Zeigen Sie: M_ε ist abgeschlossen.

Aufgabe 2. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in M$. Zeigen Sie, daß ein $\delta > 0$ existiert, so daß $f(x) > 0$ für alle $x \in B_\delta(x_0)$.

Aufgabe 3. Seien (M_1, d_1) , (M_2, d_2) metrische Räume und M_1 kompakt. Zeigen Sie, daß jede stetige Abbildung $f: M_1 \rightarrow M_2$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 4. Ein Faden wird auf der Peripherie des Einheitskreises im Uhrzeigersinn aufgewickelt, wobei sein Ende im Punkt $(1, 0)$ liegen möge. Wird der Faden so wieder abgewickelt, daß er immer gespannt bleibt, so beschreibt das Fadenende einen Weg von der Form einer sich gegen den Uhrzeigersinn öffnenden Spirale, der sogenannten **Evolvente** des Kreises. Zeigen Sie:

(a) Die Kreisevolvente hat die Parameterdarstellung

$$\gamma(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t),$$

wobei t die Länge des abgewickelten Fadens ist.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kreisevolvente als Funktion von t .

b.w.

Aufgabe 5. Für die stetig partiell differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gelte

$$\text{grad } f(x) = \lambda(x) \cdot x$$

mit einer reellwertigen Funktion λ . Zeigen Sie, daß f nur von $|x|$ abhängt, d.h. auf jeder Sphäre $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| = r\}$ ist f konstant.

Aufgabe 6. Eine Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **holomorph** (d.h. komplex differenzierbar in jedem Punkt), wenn es zu jedem z_0 in \mathbb{C} eine in z_0 stetige Funktion $z \mapsto \Delta(z)$ gibt mit $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z)$. Identifiziere \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 via $x + iy \equiv (x, y)$, und schreibe f als

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

mit reellwertigen Funktionen u, v . Zeigen Sie:

- (a) Die Funktion f ist holomorph genau dann, wenn die **Cauchy–Riemanschen Differentialgleichungen**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

gelten.

- (b) In diesem Falle gilt $\Delta u = \Delta v = 0$.
- (c) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist $u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ Realteil einer holomorphen Funktion? Bestimmen Sie diese holomorphe(n) Funktion(en).

Aufgabe 7. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, **konvexe Menge**, d.h. mit $a, b \in D$ gilt auch $(1-t)a + tb \in D$ für alle $t \in [0, 1]$. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex**, falls für alle $a, b \in D$ und $t \in [0, 1]$ gilt:

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Sei $f \in C^2(D)$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie, daß für jeden Punkt $a \in D$ gilt:

$$f(x) \geq f(a) + d_a f(x - a) \quad \text{für alle } x \in D.$$

Was bedeutet dies geometrisch?

Aufgabe 8. Diskutieren Sie die Höhenlinien $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, der Funktion

$$f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto xye^{-x-y}.$$

Untersuchen Sie, in welchen Rechtecken $I \times J \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ sich die Mengen

$$\{(x, y) \in I \times J: f(x, y) = c\}$$

in der Form

$$\{(x, y) \in I \times J: y = g(x)\}$$

oder

$$\{(x, y) \in I \times J: x = h(y)\}$$

mit differenzierbaren Funktionen $g: I \rightarrow J$ bzw. $h: J \rightarrow I$ darstellen lassen.

Weiter auf S. 3

Aufgabe 9. (a) Wo ist durch

$$x^3 + y^3 + 3(x^2 + y^2)z + z^3 + 5 = 0$$

eindeutig eine Funktion $(x, y) \mapsto z(x, y)$ definiert? Bestimmen Sie die lokalen Extrema dieser Funktion $(x, y) \mapsto z(x, y)$.

(b) Seien $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2, \quad g(x, y, z) = xy.$$

Zeigen Sie, daß die Schnittmenge

$$C = f^{-1}(5) \cap g^{-1}(1)$$

um jeden Punkt $(x, y, 0) \in C$ in der Form $x = x(z)$, $y = y(z)$ geschrieben werden kann. Finden Sie eine explizite Darstellung dieser Funktionen $z \mapsto x(z)$, $z \mapsto y(z)$ um den Punkt $(1, 1, 0)$.

Aufgabe 10. Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$y^2 + xz + z^2 - e^{xz} = 1$$

in einer Umgebung des Punktes $(x, y, z) = (0, -1, 1)$ in der Form $z = g(x, y)$ eindeutig auflösbar ist. Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von g um den Punkt $(x, y) = (0, -1)$ bis zu den Gliedern zweiter Ordnung.

Aufgabe 11. Sei $g: V \rightarrow V$ eine kontrahierende Abbildung eines vollständigen normierten Vektorraumes V . Zeigen Sie, daß die durch $f(x) = x + g(x)$ definierte Abbildung $f: V \rightarrow V$ ein Homöomorphismus ist, d.h. eine stetige, bijektive Abbildung, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Hinweis: Zum Beweis der Surjektivität betrachten Sie die Abbildung

$$\Phi_y(x) = y + x - f(x).$$

Aufgabe 12. (a) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$$

für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_0^+$ unter der Nebenbedingung

$$g(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n - 1 = 0$$

ihr Minimum im Punkt $(1, \dots, 1)$ annimmt. Begründen Sie sorgfältig, warum der Kandidat für ein lokales Extremum tatsächlich ein Minimum ist.

(b) Leiten Sie aus (a) die Ungleichung

$$\sqrt[n]{y_1 \cdot \dots \cdot y_n} \leq \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$$

für alle $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_0^+$ her. Die linke Seite dieser Ungleichung heißt **geometrisches Mittel** von y_1, \dots, y_n , die rechte **arithmetisches Mittel**.

b.w.

Aufgabe 13. Der **Brocardsche Winkel** ω (benannt nach Henri Brocard, 1845–1922) eines Dreiecks in der euklidischen Ebene mit Innenwinkeln α, β, γ ist bestimmt durch

$$\cot \omega = \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma.$$

Zeigen Sie, daß $\omega \leq \pi/6$.

Aufgabe 14. Diskutieren Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

(i) $\dot{x} = 2(1 + x^2)t,$

(ii) $\dot{x} = \sqrt{1 - x^2},$

(iii) $\dot{x} = t - x^2.$

Aufgabe 15. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(i) $x^{(3)} - \ddot{x} - 2\dot{x} = 0,$

(ii) $x^{(4)} + 8\ddot{x} + 16x = 0,$

(iii) $x^{(3)} + 2\ddot{x} + \dot{x} = t + 2e^{-t}.$

Abgabe: Mittwoch, 08.07.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).