SS 2017

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Topologie

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß die Relation 'kettenhomotop' eine Äquivalenzrelation ist auf der Menge der Kettenabbildungen von einem Kettenkomplex $C = (C_q)$ zu einem Kettenkomplex $D = (D_q)$.

(b) Eine Kettenabbildung $f\colon C \to D$ heißt **Kettenäquivalenz**, und die beiden Kettenkomplexe heißen dann **kettenäquivalent**, falls es eine Kettenabbildung $g\colon D \to C$ derart gibt, daß $g \circ f$ und $f \circ g$ kettenhomotop zu id_C bzw. id_D sind. Zeigen Sie, daß 'kettenäquivalent' eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge von Kettenkomplexen ist.

Aufgabe 2. Der Simplizialkomplex K sei die Vereinigung zweier Simplizialkomplexe K_1 und K_2, so daß $K_1 \cap K_2$ eine Ecke ist (**simpliziale Einpunkvereinigung**). Zeigen Sie, daß dann für $q > 0$

$$H_q(K) \cong H_q(K_1) \oplus H_q(K_2)$$

gilt. Was gilt im Fall $q = 0$?

Aufgabe 3. Sei K ein (endlicher) Simplizialkomplex der Dimension n. Schreibe α_i für die Anzahl der i-Simplexe von K. Die **Euler-Charakteristik** von K ist definiert als

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \alpha_i.$$

Wir werden später in der Vorlesung die Euler-Charakteristik als topologische Invariante kennenlernen. Zeigen Sie:

(a) Ist K ein **Graph**, d.h. ein eindimensionaler Komplex mit $|K|$ zusammenhängend, so gilt $\chi(K) \leq 1$. Gleichheit gilt genau dann, wenn K ein Baum (d.h. schleifenfrei) ist.

(b) Seien $K, L \subset \mathbb{R}^n$ Simplizialkomplexe, die sich in einem gemeinsamen Unterkomplex $K \cap L$ schneiden. Dann gilt

$$\chi(K \cup L) = \chi(K) + \chi(L) - \chi(K \cap L).$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß es zu jeder endlichen Folge $G_1, \dots, G_n$ endlich erzeugter abelscher Gruppen einen Simplizialkomplex K gibt mit $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ und $H_q(K) \cong G_q$ für $1 \leq q \leq n$, sowie $H_q(K) = 0$ für $q > n$.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß sich die Euler-Charakteristik bei baryzentrischer Unterteilung nicht ändert, d.h.

$$\chi(K) = \chi(K^1).$$

Knobelaufgabe. Auf wie viele verschiedene Arten (bis auf Homöomorphismus) kann man n 1-Henkel an eine 2-Scheibe anheften?

Abgabe: Mittwoch 5.7.17
bis spätestens 16:00 Uhr im Briefkasten
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock)