SS 2019

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, B.Sc.
Laura Jaust, B.Sc.

Analysis II

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. (a) Ein Kreis vom Radius 1 wird in der xy-Ebene entlang der x-Achse abgerollt, beginnend beim Punkt $(0,0)$ und endend beim Punkt $(2\pi, 0)$. Begründen Sie anhand einer Zeichnung, daß der Punkt auf dem Kreis, der zu Beginn bei $(0,0)$ liegt, dabei eine Kurve beschreibt, die durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi]$$

parametrisiert werden kann.

(b) Bestimmen Sie die Länge dieser Kurve.

Aufgabe 2. Die **archimedische Spirale** ist die durch

$$\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t), \quad t \in \mathbb{R},$$

definierte Kurve γ in der Ebene.

(a) Skizzieren Sie diese Kurve.

(b) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$, und $R\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion. In der Analysis I hatten wir gelernt, daß die Menge

$$\Big\{(x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \colon \ \alpha \le \varphi \le \beta, \ 0 \le r \le R(\varphi)\Big\}$$

den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta R^2(\varphi)\, d\varphi$$

hat. Sei A_n die Fläche, die berandet wird vom n-ten Umlauf der archimedischen Spirale (d.h. dem durch $2\pi(n-1) \le \varphi \le 2\pi n$ gegebenen Bogen) und dem Teil der x-Achse, der die Endpunkte dieses Bogens verbindet. Sei $B_n := A_n - A_{n-1}$ die Fläche zwischen dem $(n-1)$sten und dem $n$ten Umlauf. Zeigen Sie:

$$\text{(i) } A_1 = 4\pi^3/3, \quad \text{(ii) } B_2 = 6A_1, \quad \text{(iii) } B_{n+1} = nB_2.$$

(c) Berechnen Sie die Bogenlänge

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt$$

für den ersten Umlauf der archimedischen Spirale. Dabei dürfen Sie verwenden (siehe die nachfolgende Aufgabe), daß eine Stammfunktion von $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ gegeben ist durch

$$F(t) = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\log\big(t + \sqrt{1+t^2}\big).$$

b.w.

Aufgabe 3. Die Funktionen f und F seien wie in Aufgabe 2(c) definiert.

(a) Begründen Sie, warum F auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

(b) Zeigen Sie, daß F differenzierbar ist mit $F' = f$.

(c) Zeigen Sie mittels geeigneter Integrationsmethoden, wie man das Integral

$$\int_a^b \sqrt{1+t^2}\, dt$$

berechnen kann, und wie man auf diese Art herleiten kann, daß eine Stammfunktion von f durch F gegeben ist, ohne F schon im voraus zu kennen.
Hinweis: Die **Hyperbelfunktionen** sind definiert durch $\sinh x = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$ (sinus hyperbolicus) und $\cosh x = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$ (cosinus hyperbolicus). Skizzieren Sie die Graphen dieser auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen. Verifizieren Sie $\sinh' = \cosh$, $\cosh' = \sinh$, und $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Dann bietet sich die Substitution $t = \sinh x$ an. (Warum ist diese Substitution zulässig?)

Aufgabe 4. (a) Zeigen sie durch Beispiele, daß für $n \geq 2$ das Analogon des Mittelwertsatzes für Kurven $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *nicht* gilt, d.h. daß der Vektor

$$\frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{t_2 - t_1}$$

im allgemeinen nicht als Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$ mit $t \in [t_1, t_2]$ dargestellt werden kann.

(b) Zeigen Sie, daß für $n = 2$ stets eine Stelle $t \in [t_1, t_2]$ existiert, wo der Geschwindigkeitsvektor parallel zum Sekantenvektor ist.

(c) Geben Sie Beispiele dafür, daß die Aussage von (b) für $n \geq 3$ im allgemeinen nicht gilt.

Abgabe: Montag, 29.4.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).