SS 2019

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, B.Sc.
Laura Jaust, B.Sc.

# Analysis II

Übungsblatt 6

**Aufgabe 1.** Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^6} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß im Punkt $(0,0)$ alle Richtungsableitungen existieren. Ist $f$ dort differenzierbar?

**Aufgabe 2.** Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^a t^3 e^{t^2}\, dt$ auf beide der folgenden Weisen:

(a) durch partielle Integration,

(b) durch Betrachten der Funktion $F(x) = \displaystyle\int_0^a t e^{xt^2}\, dt$.

**Aufgabe 3.** In dieser Aufgabe wollen wir an einem Beispiel zeigen, daß die Existenz der iterierten Integrale nicht ausreicht, um den Satz von Fubini zu gewährleisten, daß also eine Bedingung wie die Stetigkeit des Integranden auf dem abgeschlossenen Rechteck unerläßlich ist.

(a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx$, wobei $y$ ein reeller Parameter im offenen Intervall $(0,1)$ ist.

(b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx \right) dy,$$

d.h. den Grenzwert

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_\varepsilon^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx \right) dy.$$

(c) Zeigen Sie, möglichst ohne weiteres Rechnen, daß

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx \right) dy \neq \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy \right) dx.$$

b.w.

**Aufgabe 4.** (a) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Weiter seien $a, b \in D$ derart, daß das gesamte Segment

$$[a,b] := \{a + t(b-a)\colon\ t \in [0,1]\}$$

in $D$ liegt. Zeigen Sie den folgenden **Mittelwertsatz**: Es gibt ein $c \in (a,b)$ mit

$$f(b) - f(a) = \langle \operatorname{grad} f(c), b - a \rangle.$$

Hinweis: Wenden Sie die Kettenregel und den Mittelwertsatz der 1-dimensionalen Differentialrechnung auf die Funktion $\phi(t) = f(a + t(b-a))$ an.

(b) Seien $D, a, b$ wie in (a), aber jetzt $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$. Setze $h := b - a$. Zeigen Sie, daß

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 J_f(a + th)\, dt \cdot h.$$

Beachten Sie, daß das Integral eine $(m \times n)$-Matrix liefert.

**Bonusaufgabe.** (a) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Bekanntlich nennen wir eine Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $a \in D$, wenn es eine lineare Abbildung (bzw. eine $(m \times n)$-Matrix) $J_f(a)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so daß

$$f(a+h) = f(a) + J_f(a) \cdot h + \varphi(h)$$

mit $\varphi(h) = o(|h|)$. Zeigen Sie, daß dies äquivalent zu der folgenden Aussage ist: Es gibt eine Abbildung $A$ von $D$ in den Raum der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, so daß

$$f(x) = f(a) + A(x) \cdot (x - a),$$

und zwar so, daß $A$ in $a$ stetig ist mit dem Wert $A(a) = J_f(a)$.

Hinweis: Um aus der ersten die zweite Definition zu erhalten, schreibe $x = a + h$ und

$$\varphi(h) = \langle h, \frac{h}{|h|} \rangle \cdot \frac{\varphi(h)}{|h|}$$

für $h \neq 0$, und definiere damit für jedes $x \in D$ die lineare Abbildung $v \mapsto A(x) \cdot v$ geeignet. Für die andere Richtung argumentiere wie in der Vorlesung im Fall $m = n = 1$.

(b) Benutzen Sie die alternative Darstellung einer differenzierbaren Abbildung aus (a) um die Kettenregel zu beweisen, analog zum Argument aus der Analysis I.

Abgabe: Montag, 13.5.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).