SS 2019

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, B.Sc.
Laura Jaust, B.Sc.

Analysis II

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Gegeben sei eine stetig partiell differenzierbare Funktion

$$g\colon\ [a,b]\times[a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\quad (x,t)\longmapsto g(x,t),$$

mit deren Hilfe eine Funktion $G\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ durch $G(x)=\int_a^x g(x,t)\,dt$ definiert wird. Zeigen Sie, daß G differenzierbar ist, und daß folgende Gleichung gilt:

$$G'(x) = g(x,x) + \int_a^x \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Aufgabe 2. (a) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion $f\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, die durch

$$f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$$

definiert ist. Skizzieren Sie die Höhenlinien, das Gradientenvektorfeld, und den Graphen dieser Funktion. Die durch den Graphen gegebene Fläche im $\mathbb{R}^3$ wird als *Affensattel* bezeichnet — warum?

(b) Das folgende Beispiel von Peano zeigt, daß eine Funktion auf dem $\mathbb{R}^2$ in einem Punkt p kein lokales Minimum haben muß, selbst wenn ihre sämtlichen Beschränkungen auf die Geraden durch p dort lokale Minima haben.

Sei $f\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2).$$

Zeigen Sie, daß gilt:

(i) Für beliebige $a,b\in\mathbb{R}$, $(a,b)\neq(0,0)$, hat die Funktion $\phi\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\phi(t):=f(at,bt)$ in $t=0$ ein isoliertes lokales Minimum.

(ii) Die Funktion f hat in $(0,0)$ kein lokales Minimum. Wo gilt $f>0$, wo $f<0$?

Aufgabe 3. Für eine stetige vektorwertige Funktion $v=(v_1,\ldots,v_n)\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}^n$ ist das Integral definiert durch

$$\int_a^b v(t)\,dt := \Big(\int_a^b v_1(t)\,dt,\ldots,\int_a^b v_n(t)\,dt\Big).$$

Es bezeichne $|\,.\,|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß

$$\Big|\int_a^b v(t)\,dt\Big| \leq \int_a^b |v(t)|\,dt.$$

Hinweis: Für $w\in\mathbb{R}^n$ gilt aufgrund der Linearität des Integrals

$$\Big\langle \int_a^b v(t)\,dt, w\Big\rangle = \int_a^b \langle v(t),w\rangle\,dt.$$

b.w.

Aufgabe 4. (a) Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x,y) = \begin{cases} y - x^2 & \text{für } y \geq x^2, \\ \dfrac{y^2}{x^2} - y & \text{für } 0 \leq y \leq x^2, \end{cases}$$

und $g(x,-y) = -g(x,y)$ für $y > 0$.

Zeigen Sie, daß g auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, aber nicht überall stetig differenzierbar.

(b) Die differenzierbare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f(x,y) = (x, g(x,y))$. Zeigen Sie, daß die Jacobische Matrix von f in $(0,0)$ die Einheitsmatrix ist.

(c) Zeigen Sie, daß es in jeder Umgebung von $(0,0)$ Punkte $(x,y) \neq (x',y')$ mit $f(x,y) = f(x',y')$ gibt.

Diese Aufgabe zeigt, daß der Satz über lokale Diffeomorphismen falsch ist, wenn man statt stetiger Differenzierbarkeit nur Differenzierbarkeit fordert.

Abgabe: Montag, 20.5.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).