SS 2019

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, B.Sc.
Laura Jaust, B.Sc.

Analysis II

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + uy + e^v &= 0 \\ 2x + u^2 - uv &= 5 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x, y) = (2, 5)$ durch eine C^1-Abbildung

$$(x, y) \longmapsto (u(x, y), v(x, y))$$

mit $u(2, 5) = -1$ und $v(2, 5) = 0$ aufgelöst werden kann. Berechnen Sie die Ableitung dieser Abbildung im Punkt $(x, y) = (2, 5)$.

Aufgabe 2. Es sei A eine reelle symmetrische $(n \times n)$-Matrix. Setze

$$\mu := \max \big\{ x^{\mathrm{t}} A x \colon\ x \in \mathbb{R}^n,\ |x| = 1 \big\}.$$

Zeigen Sie mittels der Methode der Lagrange-Multiplikatoren, daß μ ein Eigenwert von A ist, d.h. es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, mit $Ax = \mu x$.

Aufgabe 3. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Wir betrachten das **Ellipsoid**

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ h(x, y, z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}.$$

Die **Tangentialebene** T an M in einem Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in M$ ist definiert als die affine Ebene durch (x_0, y_0, z_0), die orthogonal zum Gradienten von h in diesem Punkt steht. Im folgenden sei stets angenommen, daß die drei Koordinaten x_0, y_0, z_0 positiv sind.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene T durch $(x_0, y_0, z_0) \in M$.

(b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte A, B, C von T mit den drei Koordinatenachsen.

b.w.

(c) Die affine Ebene T schneidet aus dem ersten Oktanten $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ein Tetraeder mit den vier Ecken A, B, C und Ursprung aus, d.h. die vier Dreieckseiten dieses Tetraeders liegen in den Koordinatenebenen bzw. in der Tangentialebene. Zeigen Sie, daß das Volumen dieses Tetraeders gegeben ist durch

$$V(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{(abc)^2}{x_0 y_0 z_0}.$$

Dabei dürfen Sie verwenden, daß das Volumen eines Tetraeders (oder allgemeiner einer Pyramide) gegeben ist durch

$$\frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}.$$

(d) Finden Sie den Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in M$, für den dieses Volumen V minimal wird. Zeigen Sie, daß es sich dabei um den Schwerpunkt des entsprechenden Dreieckes ABC handelt.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie mit dem iterativen Verfahren aus dem Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf eine Lösung α der Differentialgleichung

$$\dot{x} = 3t^2 x,$$

mit Anfangsbedingung $\alpha(0) = x_0$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

Abgabe: Montag, 3.6.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).