SS 2019

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, B.Sc.
Laura Jaust, B.Sc.

Analysis II

Übungsblatt 12

Lösungen zu den Aufgaben 1, 7, 9 und 12 können abgegeben werden; damit können Sie Bonuspunkte für die Klausurzulassung erlangen. Die anderen Aufgaben werden in der Vorlesung besprochen. Auch hier ist der Lernerfolg aber größer, wenn Sie sich schon vorher mit den Aufgaben beschäftigt haben.

Hinweise zur Klausur am 13. Juli (Eingrenzung der Themen, Struktur der Klausur, ...) finden Sie auf der Internetseite der Vorlesung.

Aufgabe 1. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in M$. Zeigen Sie, daß ein $\delta > 0$ existiert, so daß $f(x) > 0$ für alle $x \in B_\delta(x_0)$.

Aufgabe 2. Ein Faden wird auf der Peripherie des Einheitskreises im Uhrzeigersinn aufgewickelt, wobei sein Ende im Punkt $(1, 0)$ liegen möge. Wird der Faden so wieder abgewickelt, daß er immer gespannt bleibt, so beschreibt das Fadenende einen Weg von der Form einer sich gegen den Uhrzeigersinn öffnenden Spirale, der sogenannten **Evolvente** des Kreises. Zeigen Sie:

(a) Die Kreisevolvente hat die Parameterdarstellung

$$\gamma(t) = \bigl(\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t\bigr),$$

wobei t die Länge des abgewickelten Fadens ist.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kreisevolvente als Funktion von t.

Aufgabe 3. Für die stetig partiell differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gelte

$$\operatorname{grad} f(x) = \lambda(x) \cdot x$$

mit einer reellwertigen Funktion λ. Zeigen Sie, daß f nur von $|x|$ abhängt, d.h. auf jeder Sphäre $S_r = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| = r\bigr\}$ ist f konstant.

b.w.

Aufgabe 4. Eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph** (d.h. komplex differenzierbar in jedem Punkt), wenn es zu jedem z_0 in $\mathbb{C}$ eine in z_0 stetige Funktion $z \mapsto \Delta(z)$ gibt mit $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z)$. Identifiziere $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ via $x + \mathrm{i}y \equiv (x, y)$, und schreibe f als

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

mit reellwertigen Funktionen u, v. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f ist holomorph genau dann, wenn die **Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

gelten.

(b) In diesem Falle gilt $\triangle u = \triangle v = 0$.

(c) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist $u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ Realteil einer holomorphen Funktion? Bestimmen Sie diese holomorphe(n) Funktion(en).

Aufgabe 5. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, **konvexe Menge**, d.h. mit $a, b \in D$ gilt auch $(1-t)a+tb \in D$ für alle $t \in [0, 1]$. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, falls für alle $a, b \in D$ und $t \in [0, 1]$ gilt:

$$f\big((1 - t)a + tb\big) \leq (1 - t)f(a) + tf(b).$$

Sei $f \in C^2(D)$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie, daß für jeden Punkt $a \in D$ gilt:

$$f(x) \geq f(a) + d_a f(x - a) \quad \text{für alle } x \in D.$$

Was bedeutet dies geometrisch?

Aufgabe 6. Diskutieren Sie die Höhenlinien $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, der Funktion

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & xy\mathrm{e}^{-x-y}. \end{array}$$

Untersuchen Sie, in welchen Rechtecken $I \times J \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ sich die Mengen

$$\big\{(x, y) \in I \times J\colon\ f(x, y) = c\big\}$$

in der Form

$$\big\{(x, y) \in I \times J\colon\ y = g(x)\big\}$$

oder

$$\big\{(x, y) \in I \times J\colon\ x = h(y)\big\}$$

mit differenzierbaren Funktionen $g\colon I \to J$ bzw. $h\colon J \to I$ darstellen lassen.

Weiter auf S. 3

Aufgabe 7. (a) Wo ist durch

$$x^3 + y^3 + 3(x^2 + y^2)z + z^3 + 5 = 0$$

eindeutig eine Funktion $(x, y) \mapsto z(x, y)$ definiert? Bestimmen Sie die lokalen Extrema dieser Funktion $(x, y) \mapsto z(x, y)$.

(b) Seien $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2, \quad g(x, y, z) = xy.$$

Zeigen Sie, daß die Schnittmenge

$$C = f^{-1}(5) \cap g^{-1}(1)$$

um jeden Punkt $(x, y, 0) \in C$ in der Form $x = x(z)$, $y = y(z)$ geschrieben werden kann. Finden Sie eine explizite Darstellung dieser Funktionen $z \mapsto x(z)$, $z \mapsto y(z)$ um den Punkt $(1, 1, 0)$.

Aufgabe 8. Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$y^2 + xz + z^2 - \mathrm{e}^{xz} = 1$$

in einer Umgebung des Punktes $(x, y, z) = (0, -1, 1)$ in der Form $z = g(x, y)$ eindeutig auflösbar ist. Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von g um den Punkt $(x, y) = (0, -1)$ bis zu den Gliedern zweiter Ordnung.

Aufgabe 9. Sei $g\colon V \to V$ eine kontrahierende Abbildung eines vollständigen normierten Vektorraumes V. Zeigen Sie, daß die durch $f(x) = x + g(x)$ definierte Abbildung $f\colon V \to V$ ein Homöomorphismus ist, d.h. eine stetige, bijektive Abbildung, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Hinweis: Zum Beweis der Surjektivität betrachten Sie die Abbildung

$$\Phi_y(x) = y + x - f(x).$$

Aufgabe 10. Der **Brocardsche Winkel** ω (benannt nach Henri Brocard, 1845–1922) eines Dreiecks in der euklidischen Ebene mit Innenwinkeln α, β, γ ist bestimmt durch

$$\cot \omega = \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma.$$

Zeigen Sie, daß $\omega \leq \pi/6$.

b.w.

Aufgabe 11. Diskutieren Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

(i) $\dot{x} = 2(1 + x^2)t$,

(ii) $\dot{x} = \sqrt{1 - x^2}$,

(iii) $\dot{x} = t - x$.

Aufgabe 12. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(i) $x^{(3)} - \ddot{x} - 2\dot{x} = 0$,

(ii) $x^{(4)} + 8\ddot{x} + 16x = 0$,

(iii) $x^{(3)} + 2\ddot{x} + \dot{x} = t + 2\mathrm{e}^{-t}$.

Abgabe: Montag, 1.7.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).