SS 2020 Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Funktionentheorie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\,,\quad \frac{4-3\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}\,,\quad \frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}}\,,\quad \frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}\,,\quad \sqrt{-\mathrm{i}}$$

(a) in der Form $x+\mathrm{i}y$, mit $x,y\in\mathbb{R}$, und

(b) in der Form $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, mit $r\geq 0$ reell und $\varphi\in[0,2\pi)$.

Hier bezeichnet $\sqrt{z}$ jede komplexe Zahl, deren Quadrat gleich z ist.

Für eine komplexe Zahl $z\neq 0$ nennt man jeden Winkel φ, so daß $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, ein **Argument** von z und schreibt $\varphi=\arg(z)$. Beachten Sie, daß φ nur bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von 2π definiert ist. Man kann daher $\arg(z)$ *nicht* als Funktion von z ansehen!

Aufgabe 2. Seien ε,η positive reelle Zahlen und $a,b\in\mathbb{C}$ mit $a\neq b$. Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

(a) $\{z\in\mathbb{C}\colon\ |z-a|\leq\varepsilon\}$,

(b) $\{z\in\mathbb{C}\colon\ \eta<|z-a|<\varepsilon\}$,

(c) $\{z\in\mathbb{C}\colon\ \mathrm{Im}\,(az)<0\}$,

(d) $\{z\in\mathbb{C}\colon\ 0<\arg(z)<\frac{\pi}{3}\}$,

(e) $\{z\in\mathbb{C}\colon\ |z-a|-|z-b|=\eta\}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie die folgenden Identitäten (wobei Sie die Potenzreihenentwicklungen für e^z, $\sin z$ und $\cos z$, wie auch die Produktregel $\mathrm{e}^{z+w}=\mathrm{e}^z\mathrm{e}^w$ verwenden dürfen):

(a) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\cos z+\mathrm{i}\sin z$,

(b) $\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\big)$,

(c) $\cos z=\frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\big)$,

(d) $\sin(z+w)=\sin z\cos w+\cos z\sin w$,

(e) $\cos(z+w)=\cos z\cos w-\sin z\sin w$,

(f) $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$,

(g) $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z}$,

(h) $\arg \mathrm{e}^z = \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z})$,

(i) $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$,

(j) $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$.

Knobelaufgabe. Finden Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{C} \setminus \{\pm\mathrm{i}\}$:

$$\arg\left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \arg\left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right) = \frac{\pi}{3}\,.$$

Abgabe: Dienstag 14.04.20

Bis spätestens 18:00 Uhr per e-mail an den

Leiter Ihrer Übungsgruppe. Bitte als Betreff der e-mail

“Blatt 1, [Name], [Matrikelnr.]” angeben.