SS 2020

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Funktionentheorie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Eine **Periode** einer Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist eine komplexe Zahl w, so daß

$$f(z+w) = f(z) \;\text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Für die folgenden Fragen sind die Formeln aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 1 relevant.

(a) Zeigen Sie, daß die Perioden der Funktion $z \mapsto \mathrm{e}^z$ auf $\mathbb{C}$ genau die ganzzahligen Vielfachen von $2\pi\mathrm{i}$ sind. Hat die Funktion Nullstellen?

(b) Geben Sie eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ an, die unter $z \mapsto \mathrm{e}^z$ bijektiv auf $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ abgebildet wird.

(c) Zeigen Sie, daß die Funktion $z \mapsto \sin z$ auf $\mathbb{C}$ keine weiteren als die bekannten reellen Nullstellen des Sinus hat.

(d) Zeigen sie, daß die ganzzahligen Vielfachen von 2π Perioden der Sinus-Funktion auf $\mathbb{C}$ sind. Gibt es weitere Perioden?

(e) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $z \mapsto |\sin z|$ auf $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2.

(a) Hat die Funktion $z \mapsto \operatorname{Re} z$ eine Stammfunktion?

(b) Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ die Strecke von $\gamma(a) = \mathrm{i}$ nach $\gamma(b) = 1 + 2\mathrm{i}$. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_\gamma \sin\big((1+\mathrm{i})z\big)\,dz \qquad \text{und} \qquad \int_\gamma \big(z^2 - \mathrm{i} + 3z^{-2}\big)\,dz.$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel

$$\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3} \qquad \text{und} \qquad \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z-i}\,dz.$$

Aufgabe 4. Sei Ω eine offene Menge in $\mathbb{C}$, die **sternförmig** bezüglich 0 ist, d.h. für jeden Punkt $z \in \Omega$ liegt auch das Geradensegment zwischen 0 und z vollständig in Ω. Weiter seien u eine harmonische Funktion auf Ω und v die Funktion auf Ω gegeben durch

$$v(x,y) = \int_0^1 \big(yu_x(tx,ty) - xu_y(tx,ty)\big)\,dt$$

für $z = x + \mathrm{i}y$, $z \in \Omega$. Zeigen Sie, daß $u + \mathrm{i}v$ eine auf Ω holomorphe Funktion definiert. Ist dies die einzige holomorphe Funktion auf Ω mit Realteil u? Wo geht die Bedingung ein, daß Ω sternförmig ist?

Abgabe: Dienstag 28.04.20
Bis spätestens 18:00 Uhr per e-mail an den
Leiter Ihrer Übungsgruppe. Bitte als Betreff der e-mail
"Blatt 3, [Name], [Matrikelnr.]" angeben.