

# Funktionentheorie

## Übungsblatt 7

**Aufgabe 1.** Sei  $G = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ . Bestimmen Sie eine Funktion  $f \in \mathcal{O}(G)$  mit  $f^2(z) = z^2 - 1$  und  $f(0) = i$ .

Hinweis: Schreiben Sie  $z^2 - 1 = (z + 1)(z - 1)$  und experimentieren Sie mit geeigneten Zweigen des Logarithmus von  $z \pm 1$ . Beachten Sie, daß  $e^{w/2}$  eine Wurzel von  $e^w$  ist.

Zur Erinnerung (vergl. Seite 69 im Skript): Unter einem Zweig des Logarithmus versteht man eine auf einer geschlitzten Ebene definierte Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Ein Beispiel ist der sogenannte Hauptzweig  $\log z := \log r + i\varphi$  mit  $-\pi < \varphi < \pi$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ , wobei  $z = re^{i\varphi}$ .

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, daß eine gebrochen lineare Transformation  $T$  genau dann ein Element  $T \in \text{Aut}(D_1(0))$  definiert, wenn sie in der Form

$$T(z) = \frac{az + b}{bz + \bar{a}} \quad \text{mit } |a| > |b|$$

geschrieben werden kann.

**Aufgabe 3.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $f$  eine nirgends verschwindende holomorphe Funktion auf  $G$ . Zeigen Sie, daß es eine holomorphe Funktion  $g$  auf  $G$  gibt mit  $e^{g(z)} = f(z)$ . Wie unterscheiden sich die verschiedenen Wahlmöglichkeiten für  $g$ ?

Machen Sie sich diese Aufgabe zunächst anhand des Beispiels  $f(z) = z$  (mit  $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ) klar.

**Aufgabe 4.\***

- Finden Sie einen Automorphismus  $T_0 \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ , der die obere Halbebene  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  auf die offene Einheitskreisscheibe  $D_1(0)$  abbildet.
- Beschreiben Sie die Automorphismengruppe der oberen Halbebene.

\* Die gesternteten Aufgaben werden nicht korrigiert oder bepunktet. In der Folgewoche erhalten Sie aber dennoch eine Lösungsskizze, so daß diese Aufgaben der Selbstkontrolle (oder dem reinen mathematischen Vergnügen) dienen.

Abgabe: Dienstag 26.05.20

Bis spätestens 18:00 Uhr per e-mail an den  
Leiter Ihrer Übungsgruppe. Bitte als Betreff der e-mail  
"Blatt 7, [Name], [Matrikelnr.]" angeben.