SS 2021 Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Einführung in die Riemannsche, Symplektische und Kontaktgeometrie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Der Vektorraum $\mathcal{M}$ aller $(n \times n)$-Matrizen kann mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert werden, der Vektorraum $\mathcal{S}$ der *symmetrischen* $(n \times n)$-Matrizen (d.h. Matrizen $A \in \mathcal{M}$ mit $A^{\mathsf{t}} = A$) mit $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, indem man z.B. die Einträge a_{ij} mit $i \leq j$, d.h. auf und oberhalb der Diagonale, als Koordinaten nimmt. Durch $A \mapsto A^{\mathsf{t}}A$ ist eine Abbildung $f\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{S}$ definiert.

(a) Zeigen Sie, daß f differenzierbar ist, und daß das Differential $d_A f$ gegeben ist durch $d_A f(h) = A^{\mathsf{t}}h + h^{\mathsf{t}}A \in \mathcal{S}$.

(b) Sei E die $(n \times n)$-Einheitsmatrix. Zeigen Sie, daß $d_A f\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{S}$ in jedem Punkt $A \in \mathrm{O}(n)$ der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(n) := f^{-1}(E) \subset \mathcal{M}$ surjektiv ist.

(c) Folgern Sie, daß $\mathrm{O}(n)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n(n-1)/2$ ist.

(d) Die Matrixmultiplikation gibt $\mathrm{O}(n)$ eine Gruppenstruktur. Zeigen Sie, daß die Gruppenoperationen (Multiplikation und Inversenbildung) differenzierbare Abbildungen $\mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(n) \to \mathrm{O}(n)$ bzw. $\mathrm{O}(n) \to \mathrm{O}(n)$ sind. Eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit, die gleichzeitig eine Gruppenstruktur mit dieser Differenzierbarkeitseigenschaft besitzt, nennt man **Liesche Gruppe** (nach Sophus Lie, 1842–1899).

Aufgabe 2. Wir schreiben die kartesischen Koordinaten auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$als $(x^1, \ldots, x^n, y) = (\mathbf{x}, y)$. Tangentialvektoren notieren wir entsprechend als $(\xi^1, \ldots, \xi^n, \eta) = (\boldsymbol{\xi}, \eta)$. Die **Minkowski-Metrik** m auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$ ist definiert durch

$$m\big((\boldsymbol{\xi}_1, \eta_1), (\boldsymbol{\xi}_2, \eta_2)\big) := \sum_{i=1}^{n} \xi_1^i \xi_2^i - \eta_1\eta_2.$$

(a) Zeigen Sie, daß

$$M := \big\{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ |\mathbf{x}|^2 - y^2 = -1,\ y > 0\big\},$$

das 'obere Blatt' des zweiblättrigen Hyperboloids, eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

(b) Aus der Analysis wissen wir, daß der Tangentialraum T_pM an die Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gegeben ist durch das orthogonale Komplement von $\operatorname{grad} f(p)$ (bzgl. des Standardskalarproduktes auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$), wobei f eine definierend Funktion der Hyperfläche ist, d.h. $M = \{f = 0\}$. Benutzen Sie dies, um zu zeigen:

$$T_{(\mathbf{x},y)}M = \big\{(\boldsymbol{\xi}, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ m\big((\mathbf{x}, y), (\boldsymbol{\xi}, \eta)\big) = 0\big\} \ \text{ für } (\mathbf{x}, y) \in M.$$

b.w.

(b') Zeigen Sie die Aussage in (b) alternativ dadurch, daß Sie Kurven γ in M betrachten und eine Bedingung an deren Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\gamma}$ herleiten.

(c) Beachten Sie, daß die Minkowski-Metrik keine Riemannsche Metrik ist, da m nicht positiv definit ist. Zeigen Sie mittels des aus der Linearen Algebra bekannten Trägheitssatzes von Sylvester, daß die Minkowski-Metrik aber eine Riemannsche Metrik auf M induziert, d.h. die Einschränkung der symmetrischen Bilinearform m auf $T_{(\mathbf{x},y)}M$ ist in der Tat positiv definit.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathbb{E}^n$, d.h. den $\mathbb{R}^n$ mit der durch das Standardskalarprodukt gegebenen Riemannschen Metrik $g_{\mathbb{E}^n}$.

(a) Sei $E(n)$ die Menge der reellen $((n+1) \times (n+1))$-Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mit $A \in \mathrm{O}(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$ (aufgefaßt als Spaltenvektor). Zeigen Sie, daß $E(n)$ eine Liesche Untergruppe der Gruppe $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ der invertierbaren reellen $((n+1) \times (n+1))$-Matrizen ist. Wir nennen $E(n)$ die **euklidische Gruppe**.

(b) Definiere eine Abbildung $E(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, indem wir $\mathbb{R}^n$ identifizieren mit

$$M := \{(\mathbf{x}, 1) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\},$$

und die lineare Wirkung von $E(n)$ auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$ einschränken auf die Teilmenge M. Zeigen Sie, daß dies eine differenzierbare, isometrische Wirkung auf $\mathbb{E}^n$ definiert (d.h. jedes Element von $E(n)$ wirkt als Isometrie bzgl. $g_{\mathbb{E}^n}$).

(c) Zeigen Sie, daß $E(n)$ transitiv auf dem $\mathbb{R}^n$ wirkt, und daß sich jede gegebene orthonormale Basis von Tangentialvektoren in einem Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ auf jede andere solche Basis mittels des Differentials eines geeigneten Elementes aus dem Stabilisator $E(n)_p$ abbilden läßt, d.h. $\mathbb{E}^n$ ist homogen und isotrop.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß ein Diffeomorphismus $\varphi\colon (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ genau dann eine konforme Abbildung ist, d.h. $\varphi^* g_2 = \lambda g_1$ für eine Funktion $\lambda \in C^\infty(M_1)$, wenn das Differential $T\varphi$ winkeltreu ist, d.h.

$$\angle_2(T_p\varphi(X), T_p\varphi(Y)) = \angle_1(X, Y) \quad \text{für alle } p \in M_1 \text{ und } X, Y \in T_pM_1,$$

wobei $\angle_i$ den bzgl. g_i gemessenen Winkel bezeichnet.

Abgabe: Dienstag, 20.4.21
bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs