SS 2021

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Einführung in die Riemannsche, Symplektische und Kontaktgeometrie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Geben Sie einen Beweis der Konformalität der stereographischen Projektion

$$\phi\colon\ S^n \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{E}^n,$$

der ohne Rechnung auskommt. Betrachten Sie dazu Kreise auf S^n durch den Nordpol N, die durch den Schnitt von S^n mit einer affinen Ebene im $\mathbb{R}^{n+1}$ entstehen. Zu einem gegebenen Punkt $p \in S^n$ und zwei verschiedenen Tangentialvektoren $0 \neq X_1, X_2 \in T_pS^n$ kann man zwei solche Kreise wählen, die sich in N und p schneiden und tangential an X_1 bzw. X_2 sind. Was können sie über den Schnittwinkel der beiden Kreise in N bzw. p, und über den Schnittwinkel der Bilder dieser Kreise unter ϕ aussagen? Dann verwende man die Aussage von Übungsblatt 1, Aufgabe 4.

Aufgabe 2. Wir betrachten das Hyperboloid-Modell

$$\mathbb{H}^n = \big\{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ |\mathbf{x}|^2 - y^2 = -1,\ y > 0\big\}$$

des hyperbolischen Raumes mit der durch die Minkowski-Metrik induzierten Riemannschen Metrik $g_{\mathbb{H}}$. Außerdem betrachten wir den offenen Einheitsball

$$\mathbb{B}^n := \big\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\colon\ |\mathbf{u}| < 1\big\}$$

mit der Metrik

$$g_{\mathbb{B}} := \frac{4\langle\,.\,,\,.\,\rangle_{\mathbb{R}^n}}{(1 - |\mathbf{u}|^2)^2}.$$

(a) Die **hyperbolische stereographische Projektion** ist die Abbildung $\phi\colon\ \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^n$, die einem Punkt $(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{H}^n$ den Schnittpunkt der Geraden durch $(\mathbf{x}, y)$ und $S := (\mathbf{0}, -1)$ mit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \in \mathbb{R}^{n+1}$ zuordnet. Geben Sie eine explizite Formel für ϕ an, und zeigen Sie damit, daß ϕ eine bijektive Abbildung auf $\mathbb{B}^n$ ist.

(b) Geben Sie eine explizite Formel für $\phi^{-1}\colon\ \mathbb{B}^n \to \mathbb{H}^n$ an.

(c) Zeigen Sie, daß $(\phi^{-1})^* g_{\mathbb{H}^n} = g_{\mathbb{B}^n}$, d.h. ϕ ist eine Isometrie $(\mathbb{H}^n, g_{\mathbb{H}^n}) \to (\mathbb{B}^n, g_{\mathbb{B}^n})$.

Wir wußten schon aus Aufgabe 2 von Übungsblatt 1, daß die Minkowski-Metrik eine Riemannsche Metrik auf dem Hyperboloid induziert. Die vorliegende Aufgabe liefert einen alternativen Beweis dafür.

b.w.

Aufgabe 3. Sei D die $((n+1)\times(n+1))$-Diagonalmatrix mit den Einträgen $(1,\dots,1,-1)$. Die Minkowski-Metrik m ist also gegeben durch $m\big((\boldsymbol{\xi}_1,\eta_1),(\boldsymbol{\xi}_2,\eta_2)\big)=(\boldsymbol{\xi}_1,\eta_1)^{\mathfrak{t}}D(\boldsymbol{\xi}_2,\eta_2)$, wobei wir $(\boldsymbol{\xi},\eta)$ als *Spaltenvektor* interpretieren. Die **Lorentz-Gruppe** $\mathrm{O}(n,1)$ ist die Gruppe der linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^{n+1}$, die die Minkowski-Metrik erhalten.

(a) Zeigen Sie, daß die Lorenz-Gruppe aus den Matrizen A besteht, die der Gleichung $A^{\mathfrak{t}}DA=D$ genügen.

(b) Zeigen Sie, daß Elemente der Lorentz-Gruppe das zweischalige Hyperboloid $\{|\mathbf{x}|^2-y^2=-1\}$ in sich selbst abbilden.

(c) Sei $\mathrm{O}_+(n,1)$ die Untergruppe der Lorentz-Gruppe, die $\mathbb{H}^n$ (vergl. Aufgabe 2) in sich selbst abbildet. Diese Untergruppe wirkt also isometrisch auf dem hyperbolischen Raum. Zeigen Sie analog zu Satz 1.2 der Vorlesung, daß der hyperbolische Raum homogen und isotrop bezüglich der Wirkung von $\mathrm{O}_+(n,1)$ ist.

Aufgabe 4. Sei $M\subset\widetilde{M}$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit in der Mannigfaltigkeit $\widetilde{M}$. Dies bedeutet, daß man zu jedem Punkt $p\in M$ Koordinaten $(x^1,\dots,x^N)$ auf einer Umgebung $\widetilde{U}$ von p in $\widetilde{M}$ findet, so daß $\widetilde{U}\cap M$ durch $x^{n+1}=\dots=x^N$ gegeben ist, und $(x^1,\dots,x^n)$ sind lokale Koordinaten auf M.

(a) Zeigen Sie, daß jede Funktion $f\in C^\infty(M)$ zu einer glatten (d.h. C^∞-) Funktion $\tilde f$ auf einer Umgebung von M in $\widetilde{M}$ erweitert werden kann, d.h. $\tilde f|_M=f$.

Hinweis: Benutzen Sie lokal angepaßte Koordinaten, Erweiterung unabhängig von den Koordinaten $x^{n+1},\dots,x^N$, und eine Partition der Eins auf M.

(b) Geben Sie ein Beispiel, daß man f wie in (a) im allgemeinen nicht zu einer glatten Funktion auf ganz $\widetilde{M}$ erweitern kann.

Hinweis: Es geht mit einer geeigneten Einbettung eines offenen Intervalles in den $\mathbb{R}^2$.

(c) Zeigen Sie, daß jedes Vektorfeld X auf M, d.h. $X\in\Gamma(TM)$, zu einem Vektorfeld auf einer Umgebung von M in $\widetilde{M}$ erweitert werden kann.

(d) Sei $\widetilde{X}$ ein Vektorfeld auf einer Umgebung U vom M in $\widetilde{M}$. Zeigen Sie, daß $\widetilde{X}$ längs M tangential an M ist (und damit $\widetilde{X}|_M\in\Gamma(TM)$) genau dann, wenn $(\widetilde{X}\tilde f)|_M=0$ für jede Funktion $\tilde f\in C^\infty(U)$ mit $\tilde f|_M=0$.

(e) Seien $\widetilde{X},\widetilde{Y}$ Vektorfelder auf U, die längs M tangential an M sind. Zeigen Sie mittels (d), daß dann auch die Lie-Klammer $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]$ längs M tangential an M ist.

Zur Erinnerung: Die Lie-Klammer ist das durch $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]_p\tilde f=\widetilde{X}_p(\widetilde{Y}\tilde f)-\widetilde{Y}_p(\widetilde{X}\tilde f)$ definierte Vektorfeld, wobei $\widetilde{X}\tilde f$ die Funktion $q\mapsto\widetilde{X}_q\tilde f$ bezeichnet.

Diese Überlegungen werden wir später vielfach benutzen, z.B. bei der Definition der kovarianten Ableitung längs Kurven, oder beim Beweis der Symmetrie des Tangentialzusammenhangs.

Abgabe: Dienstag, 27.4.21

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs