SS 2021

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Einführung in die Riemannsche, Symplektische und Kontaktgeometrie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Es sei $\varphi\colon (M,g) \to (\widetilde{M},\tilde{g})$ eine Isometrie. Der Levi-Civita-Zusammenhang sei mit ∇ bzw. $\widetilde{\nabla}$ bezeichnet. Für ein Vektorfeld X auf M ist durch

$$(\varphi_* X)_q = T_{\varphi^{-1}(q)}\varphi(X_{\varphi^{-1}(q)}), \quad q \in \widetilde{M},$$

ein Vektorfeld auf $\widetilde{M}$ definiert. Entsprechend definiert man für eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ die Funktion $\varphi_* f \in C^\infty(\widetilde{M})$ durch $\varphi_* f = f \circ \varphi^{-1}$. Durch $(\varphi^*\widetilde{\nabla})_X Y = \varphi_*^{-1}\big(\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X}(\varphi_* Y)\big)$ ist eine Abbildung $\varphi^*\widetilde{\nabla}\colon \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ definiert. Zeigen Sie, daß $\varphi^*\widetilde{\nabla}$ ein Zusammenhang auf M ist, der symmetrisch und metrisch (bzgl. g) ist. Dies erfordert lediglich eine sorgfältige Betrachtung der Definition von φ_*. Bedenken Sie dabei auch die algebraische Definition des Differentials, wenn man Tangentialvektoren als Derivationen interpretiert: $T_p\varphi(X_p)(\tilde{f}) = X_p(\tilde{f} \circ \varphi)$ für $\tilde{f} \in C^\infty(\widetilde{M})$.

Aufgrund der Eindeutigkeit des Levi-Civita-Zusammenhangs folgt dann, daß $\varphi^*\widetilde{\nabla} = \nabla$, und daß für die Riemannsche Geodätische γ in (M,g) mit $\gamma(0) = p \in M$ und $\dot{\gamma}(0) = V \in T_pM$ die Bildkurve $\varphi \circ \gamma$ die Riemannsche Geodätische in $(\widetilde{M},\tilde{g})$ mit Anfangspunkt $\varphi(p)$ und Anfangsgeschwindigkeit $T_p\varphi(V)$ ist.

Überlegen Sie sich, daß für eine Komposition $\varphi \circ \psi$ von Diffeomorphismen $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ gilt, sowohl auf Funktionen wie auf Vektorfeldern.

Aufgabe 2. Wir betrachten das Hyperboloid-Modell $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ des hyperbolischen Raumes mit der durch die Minkowski-Metrik m des $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Riemannschen Metrik $g_{\mathbb{H}^n}$.

(a) Zeigen Sie, daß der Tangentialzusammenhang ∇^T auf $\mathbb{H}^n$, der durch Orthogonalprojektion bzgl. m (!) des euklidischen Zusammenhangs auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$ definiert ist, metrisch bzgl. $g_{\mathbb{H}^n}$ und symmetrisch ist, also gleich dem Levi-Civita-Zusammenhang.

(b) Sei $p \in \mathbb{H}^n$ und $v \in T_p\mathbb{H}^n$ mit $|v| = 1$, wobei die Länge mittels $g_{\mathbb{H}^n}$ gemessen wird. Wir betrachten die Kurve $t \mapsto \gamma(t) = p\cosh t + v \sinh t$. Verifizieren Sie die folgenden Punkte:

  (i) $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$, und die Spur von γ liegt ganz in $\mathbb{H}^n$.

  (ii) $\ddot{\gamma}(t)$ ist m-orthogonal zu $T_{\gamma(t)}\mathbb{H}^n$.

  Folgern Sie mit (a), daß γ die eindeutige hyperbolische Geodätische mit den gegebenen Anfangsbedingungen ist.

Aufgabe 3. Aus der Vorlesung wissen wir, daß die Geodätischen im Hyperboloid-Modell $\mathbb{H}^2$ der hyperbolischen Ebene gegeben sind als der Durchschnitt von $\mathbb{H}^2$ mit einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ durch den Ursprung, also durch eine lineare Gleichung der Form $\alpha_i x^i = 0$ ('Typ 1') oder $y = \alpha_i x^i$ ('Typ 2'), parametrisiert proportional zur Bogenlänge. Wir wollen nun die Geodätischen im Scheibenmodell $\mathbb{B}^2$ bestimmen.

(a) Zeigen Sie, daß eine Geodätische vom Typ 1 unter der hyperbolischen stereographischen Projektion Φ auf ein Geradensegment in $\mathbb{B}^2$ durch den Ursprung abbildet.

(b) Zeigen Sie, daß die Gleichung für Geodätische vom Typ 2 unter der hyperbolischen stereographischen Projektion in die Gleichung

$$|\mathbf{u}|^2 - 2\langle \alpha, \mathbf{u} \rangle + 1 = 0$$

transformiert, mit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Hier bezeichnet $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$, und $|\, .\, |$ die zugehörige Norm.

(c) Zeigen Sie, daß die Gleichung aus (b) äquivalent geschrieben werden kann als

$$|\mathbf{u} - \alpha|^2 = |\alpha|^2 - 1.$$

(d) Die Gleichung aus (c) beschreibt die leere Menge für $|\alpha|^2 < 1$, und einen Punkt auf dem Rand $\partial\mathbb{B}^2$ von $\mathbb{B}^2$ für $|\alpha|^2 = 1$. Für $|\alpha|^2 > 1$ erhalten wir einen Kreis vom Radius $\sqrt{|\alpha|^2 - 1}$ um den Punkt α. Zeigen Sie mittels einer elementargeometrischen Überlegung, daß der Schnitt dieses Kreises mit $\mathbb{B}^2$ ein Kreisbogen ist, der orthogonal auf $\partial\mathbb{B}^2$ steht.

Aufgabe 4. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M)$.

(a) Zeigen Sie, daß durch die Bedingung

$$g(\operatorname{grad} f, Y) = Yf \quad \text{für alle } Y \in \Gamma(TM)$$

ein eindeutiges Vektorfeld $\operatorname{grad} f$ auf M definiert ist. Wir nennen dies das **Gradientenvektorfeld** von f.

(b) Zeigen Sie, daß $\operatorname{grad} f$ orthogonal auf den Niveaumengen $\{f = c\}$ steht. (Wie in der Analysis II zeigt man, daß $\{f = c\}$ eine Untermannigfaltigkeit von M genau dann ist, wenn der Gradient längs dieser Niveaumenge nirgends verschwindet.)

(c) Nun sei weiter angenommen, daß f die Eigenschaft besitzt, daß das Gradientenvektorfeld Länge konstant 1 hat bezüglich g, also $g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) \equiv 1$. Zeigen Sie, daß dann die Integralkurven des Vektorfeldes $\operatorname{grad} f$, d.h. die Kurven γ in M mit $\dot\gamma(t) = (\operatorname{grad} f)_{\gamma(t)}$, Riemannsche Geodätische sind.

Abgabe: Dienstag, 11.5.21

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs