SS 2021

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Einführung in die Riemannsche, Symplektische und Kontaktgeometrie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Auf dem $\mathbb{R}^n$ betrachten wir das Vektorfeld $X = \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

(a) Bestimmen Sie den Fluß

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, q) & \longmapsto & \phi_t(q) \end{array}$$

des Vektorfeldes X auf dem $\mathbb{R}^n$, indem Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = X(x)$, d.h. das Anfangswertproblem

$$\dot{\alpha}_p(t) = X_{\alpha_p(t)}, \quad \alpha_p(0) = p$$

explizit in den kartesischen Koordinaten $(x^1, \ldots, x^n)$ schreiben. Beobachten Sie insbesondere, daß der Fluß tatsächlich global definiert ist.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die für ein gegebenes $k \in \mathbb{N}$ der Gleichung $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ genügt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$; man nennt dann f *homogen vom Grad* k. Zeigen Sie mittels (a) und der Identität $L_X f = X(f)$ die Euler-Formel für homogene Funktionen:

$$\sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = kf.$$

Aufgabe 2. Ein Vektorfeld V auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) heißt **parallel**, falls es parallel (bzgl. des Levi-Civita-Zusammenhangs ∇) entlang jeder Kurve ist. Dies ist äquivalent dazu, daß $\nabla_X V = 0$ gilt für jedes Vektorfeld X auf M.

(a) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $V_x \in T_x\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß V_x eine eindeutige Erweiterung zu einem parallelen Vektorfeld V (bzgl. des euklidischen Zusammenhangs) auf dem $\mathbb{R}^n$ hat.

(b) Wir parametrisieren die 2-Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (ohne den Nullmeridian) durch

$$(0, \pi) \times (0, 2\pi) \ni (\theta, \varphi) \longmapsto (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \in S^2.$$

Berechnen Sie die metrischen Koeffizienten g_{ij} und die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k des Levi-Civita-Zusammenhangs bezüglich dieser Parametrisierung.

(c) Zeigen sie, daß das auf S^2 ohne Nullmeridian definierte Vektorfeld $V = \partial/\partial\theta$ parallel längs des Äquators und längs jedes Merdians $\{\varphi = \varphi_0\}$ ist.

(d) Sei $p \in S^2$ der Punkt mit Koordinaten $\theta = \pi/2$ und $\varphi = \pi$. Zeigen Sie, daß V_p keine Erweiterung zu einem parallelen Vektorfeld auf einer Umgebung von p besitzt.

(e) Folgern Sie aus (a) und (d), daß keine Umgebung von $p \in S^2$ isometrisch zu einer offenen Menge in $\mathbb{E}^2$ ist. Dies hatten wir in der Elementaren Differentialgeometrie bereits durch den Vergleich der Gauß-Krümmungen gezeigt, aber das hier verwendete Argument ist noch elementarer.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß der Krümmungstensor

$$(X, Y, Z) \longmapsto R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) linear über $C^\infty(M)$ in allen drei Argumenten X, Y, Z ist. Dies rechtfertigt die Bezeichnung 'Tensor'.

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, daß der Krümmungstensor invariant unter (lokalen) Isometrien ist. Sei dazu $\varphi\colon (M, g) \to (\widetilde{M}, \tilde{g})$ eine Isometrie, d.h. $\varphi^* \tilde{g} = g$. Wir bezeichnen den Kümmungstensor von M und $\widetilde{M}$ mit R beziehungsweise $\widetilde{R}$. Zeigen Sie, daß

$$\widetilde{R}(\varphi_* X, \varphi_* Y)\varphi_* Z = \varphi_*(R(X, Y)Z)$$

und

$$\tilde{g}_{\varphi(p)}(\widetilde{R}(\varphi_* X, \varphi_* Y)\varphi_* Z, \varphi_* W) = g_p(R(X, Y)Z, W)$$

für alle Vektorfelder X, Y, Z, W auf M.

Abgabe: Dienstag, 18.5.21

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs