Symplektische Topologie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. (a) Geben Sie explizit eine symplektische Form auf der 2-Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ an.

(b) Gibt es eine symplektische Form auf der projektiven Ebene $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$?

Aufgabe 2. Sei (M, ω) eine $2n$-dimensionale symplektische Mannigfaltigkeit. Die geschlossene 2-Form ω definiert eine de-Rham-Kohomologieklasse $[\omega] \in H^2_{\mathrm{dR}}(M)$. (Zur Erinnerung: $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ ist der reelle Vektorraum der geschlossenen k-Formen auf M modulo der exakten k-Formen.)

(a) Es sei nun angenommen, daß M eine *geschlossene* Mannigfaltigkeit ist, d.h. M is kompakt und ohne Rand. Zeigen Sie mittels des Satzes von Stokes:

 (i) $[\omega^n] \neq 0$ in $H^{2n}_{\mathrm{dR}}(M)$.

 (ii) $[\omega] \neq 0$ in $H^2_{\mathrm{dR}}(M)$.

(b) Gibt es eine symplektische Form auf S^{2n} für $n \geq 2$?

Aufgabe 3. Es seien (M_1, ω_1) und (M_2, ω_2) zwei symplektische Mannigfaltigkeiten der Dimension $2n$. Mit π_i sei die Projektion der Produktmannigfaltigkeit $M_1 \times M_2$ auf M_i bezeichnet, $i = 1, 2$.

(a) Zeigen Sie, daß $\omega_\pm := \pi_1^*\omega_1 \pm \pi_2^*\omega_2$ symplektische Formen auf $M_1 \times M_2$ sind. Beachte, daß ω_+ und ω_- für ungerades n verschiedene Orientierungen von $M_1 \times M_2$ definieren.

(b) Für einen Diffeomorphismus $\varphi\colon\ M_1 \to M_2$ ist der Graph

$$\Gamma_\varphi := \bigl\{(p, \varphi(p))\colon\ p \in M_1\bigr\} \subset M_1 \times M_2$$

eine $2n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M_1 \times M_2$. Zeigen Sie, daß φ ein Symplektomorphismus genau dann ist, wenn Γ_φ eine Lagrange-Untermannigfaltigkeit der symplektischen Mannigfaltigkeit $(M_1 \times M_2, \omega_-)$ ist.

Aufgabe 4. Als Vorbereitung für spätere Überlegungen wollen wir in dieser Aufgabe eine wichtige Formel für das äußere Differential einer 1-Form herleiten.

Sei α eine 1-Form auf einer Mannigfaltigkeit M. Dies bedeutet, daß α fasernweise eine lineare Abbildung $T_pM \to \mathbb{R}$ definiert, und in lokalen Koordinaten gilt $\alpha = a_j \, \mathrm{d}x^j$ (Summationskonvention!) mit differenzierbaren Funktionen $a_1, \ldots, a_n$ und $\mathrm{d}x^j(\partial/\partial x^i) = \delta_{ij}$. Die äußere Ableitung $\mathrm{d}\alpha$ von α ist die 2-Form, die lokal durch

$$\mathrm{d}(a_j \, \mathrm{d}x^j) = \frac{\partial a_j}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

definiert ist, wobei $\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j(X, Y) = \mathrm{d}x^i(X)\mathrm{d}x^j(Y) - \mathrm{d}x^j(X)\mathrm{d}x^i(Y)$. Zeigen Sie

$$\mathrm{d}\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]).$$

Hinweis: Zeigen Sie die $C^\infty(M)$-Linearität der rechten Seite, und verifizieren Sie die Identität dann für Koordinatenvektorfelder.

Abgabe: Dienstag 18.4.23 in der Übung.