Symplektische Topologie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. In Aufgabe 3 von Übungsblatt 5 hatten wir gesehen, daß

$$\int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^1} \omega_{\mathrm{FS}} = \pi.$$

In dieser Aufgabe wollen wir einen alternativen Beweis dieser Aussage mittels der Hopf-Faserung

$$\mathbb{C}^2 \supset S^3 \xrightarrow{\pi_{\mathrm{H}}} \mathbb{C}\mathrm{P}^1 = S^2, \quad (z_1, z_2) \longmapsto [z_1 : z_2]$$

finden. Überlegen Sie sich dazu folgendes:

(a) Die 2-Sphäre $S^2 = S^3 \cap \{y_2 = 0\}$ enthält eine ganze Hopf-Faser als Äquator, und jede andere Hopf-Faser schneidet S^2 in einem Antipodenpaar.

(b) Das obige Integral ist gleich dem Integral der Standardform ω_0 auf dem $\mathbb{R}^4$ über eine Scheibe im $\mathbb{R}^4$, deren Rand eine Faser von π_{H} ist.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Quotienten $M_k := \Gamma_k \setminus \mathrm{Nil}^3$ der Heisenberg-Gruppe wie in der Vorlesung. Nach Konstruktion ist Γ_k die Fundamentalgruppe von M_k.

(a) Geben Sie eine Präsentation der Gruppe Γ_k an, d.h. ein endliches System von Erzeugern und Relationen.

(b) Zeigen Sie, daß $H_1(M_k) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_k$ gilt.

(c) Zeigen Sie, daß $H^i_{\mathrm{dR}}(M_k) \cong \mathbb{R}^2$ für $i = 1, 2$, und geben Sie Erzeuger für diese de-Rham-Kohomologiegruppen an.

Damit folgt, daß die symplektische Mannigfaltigkeit $M_k \times S^1$ eine ungerade erste Betti-Zahl $b_1 = 3$ hat, d.h. $\dim H^1_{\mathrm{dR}}(M_k \times S^1) = 3$. Aus der Hodge-Theorie weiß man, daß Kähler-Mannigfaltigkeiten stets gerade Betti-Zahlen in den ungeraden Dimensionen haben. Historisch ist $M_k \times S^1$, auch Kodaira–Thurston-Mannigfaltigkeit genannt, wohl das erste Beispiel einer symplektischen nicht-Kähler-Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 3. Wir betrachten den Quotient M von $\mathbb{R}^4$ unter den Äquivalenzen

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) &\sim (x,y+1,z,t),\\ (x,y,z,t) &\sim (x,y,z+1,t),\\ (x,y,z,t) &\sim (x,y,z,t+1),\\ (x,y,z,t) &\sim (x+1,t,y,z).\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, daß M als T^3-Bündel über S^1 und als T^2-Bündel über T^2 aufgefaßt werden kann.

(b) Begründen Sie, warum die 2-Formen

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y$$

auf dem $\mathbb{R}^4$ als 2-Formen auf M betrachtet werden können.

(c) Zeigen Sie, daß diese Formen auf M nichttriviale Kohomologieklassen repräsentieren.

(d) Finden Sie symplektische Formen auf M.

Aufgabe 4. Seien M, B geschlossene, zusammenhängende Mannigfaltigkeiten und $\pi\colon M \to B$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, daß π genau dann eine lokal triviale Faserung ist, wenn π surjektiv und eine Submersion ist (d.h. $T_p\pi\colon T_pM \to T_{\pi(p)}B$ ist surjektiv für jedes $p \in M$).

Abgabe: Dienstag 16.5.23 in der Übung.