SS 2023 Prof. Hansjörg Geiges

Symplektische Topologie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$, auf dem eine freie S^1-Wirkung gegeben ist. Zeigen Sie, daß der Quotientenraum $M/\!\sim$, wobei

$$p \sim p' :\Longleftrightarrow p, p' \text{ liegen in einer } S^1\text{-Bahn in } \partial M,$$

die Struktur eine differenzierbaren Mannigfaltigkeit trägt derart, daß $\big(M/\!\sim\big) \setminus \big(\partial M/S^1\big)$ diffeomorph zu $M \setminus \partial M$ ist, und $\partial M/S^1$ eine Untermannigfaltigkeit von $M/\!\sim$ ist.
Hinweis: Kragenumgebung.

Aufgabe 2. Sei $M = T^2 \times [0,1]$, wobei wir den 2-Torus als $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ auffassen. Auf der Randkomponente $T^2 \times \{0\}$ wirke S^1 durch $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \theta, \theta_2)$, und auf $T^2 \times \{1\}$ durch $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2 + \theta)$. Zeigen Sie, daß der Quotientenraum $M/\sim$ (wie in Aufgabe 1) diffeomorph zu S^3 ist.

Aufgabe 3. Analog zu den Sätzen 5.8 und 5.9 der Vorlesung definieren wir $M_{(-\infty,a]}$ als differenzierbare Mannigfaltigkeit, indem wir auf $M \times \mathbb{C}$ die *Diagonalwirkung* von S^1 betrachten, sowie die Funktion

$$F\colon\ M \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (p, z) \longmapsto f(p) + |z|^2.$$

Dann

$$M_{(-\infty,a]} := F^{-1}(a)/S^1.$$

(a) Beschreiben Sie $M_{(-\infty,a]}$ als Randquotient (wie in der ursprünglichen Definition von $M_{[a,\infty)}$).

(b) Zeigen Sie unter den Voraussetzungen des Satzes 5.9, daß die reduzierte symplektische Mannigfaltigkeit $f^{-1}(a)/S^1$ eine symplektische Untermannigfaltigkeit sowohl von $M_{[a,\infty)}$ (in der Vorlesung gesehen) als auch von $M_{(-\infty,a]}$ ist, deren Normalenbündel orientierungsumkehrend isomorph zueinander sind.

Aufgabe 4. Wir betrachten den $\mathbb{C}^n$ mit der gewöhnlichen symplektischen Form ω_0 und der Diagonalwirkung von S^1 mit Impulsabbildung $f(z) = |z|^2$. Für $\varepsilon > 0$, bestimmen Sie die symplektische Mannigfaltigkeit $\mathbb{C}^n_{(-\infty,\varepsilon]}$.

Abgabe: Dienstag 20.6.23 in der Übung.