SS 2024 Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Tilman Becker

Lineare Algebra II

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Definiere $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y,z) = (x+2y+3z, 4x+5y+6z).$$

Sei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die duale Basis zur Basis $(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)$ von $\mathbb{R}^3$, und β_1, β_2 die duale Basis zur Standardbasis von $\mathbb{R}^2$.

(a) Beschreiben Sie die Linearformen $f^*\beta_1$ und $f^*\beta_2$ explizit als lineare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

(b) Schreiben Sie $f^*\beta_1$ und $f^*\beta_2$ als Linearkombinationen von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Aufgabe 2. Für $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir den reellen Vektorraum $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ der reellen Polynome vom Grad $\leq m$.

(a) Zeigen Sie, daß die zur Basis $(1, x, \ldots, x^m)$ von $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ duale Basis $(\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$ von $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})^*$ gegeben ist durch

$$\alpha_k(p) = \frac{p^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{für } p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}).$$

Hier bezeichnet $p^{(k)}$ die k-te Ableitung von p, mit $p^{(0)} := p$.

(b) Was ist die duale Basis $(\beta_0, \ldots, \beta_m)$ zur Basis $(1, x-2, \ldots, (x-2)^m)$?

(c) Durch die Basen in (a) bzw. (b) sind zwei Isomorphismen $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_m(\mathbb{R})^*$ gegeben, zum einen $(1, x, \ldots, x^m) \mapsto (\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$, zum anderen $(1, x-2, \ldots, (x-2)^m) \mapsto (\beta_0, \ldots, \beta_m)$ (und jeweils lineare Erweiterung). Zeigen sie, daß diese Isomorphismen verschieden sind.

Aufgabe 3. Sei $f\colon \mathcal{P}_5(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ eine lineare Abbildung, und sei $\alpha\colon \mathcal{P}_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ die durch $\alpha(p) = p(3)$ definierte Linearform.

(a) Angenommen, die zu f duale Abbildung f^* hat als Kern den Unterraum $\mathrm{Lin}(\alpha) \subset \mathcal{P}_5(\mathbb{R})^*$. Zeigen Sie, daß $\mathrm{Bild}\, f = \{p \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})\colon\ p(3) = 0\}$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Inklusion $\subset$, und verwenden Sie dann die Dimensionsformel für lineare Abbildungen. Was ist der Rang von f^*? Wie bestimmt sich daraus der Rang von f?

(b) Zeigen Sie umgekehrt: Gilt $\mathrm{Bild}\, f = \{p \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})\colon\ p(3) = 0\}$, so folgt $\mathrm{Kern}\, f^* = \mathrm{Lin}(\alpha)$.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer Abbildung f mit $\mathrm{Bild}\, f$ und $\mathrm{Kern}\, f^*$ wie in (a) und (b).

Aufgabe 4. Sei $\chi_A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3$ das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ mit $\det A \neq 0$.

(a) Benutzen Sie den Satz von Cayley–Hamilton, um die inverse Matrix A^{-1} als Linearkombination von E, A und A^2 zu schreiben. Wo geht bei dieser Formel die Bedingung $\det A \neq 0$ ein?

(b) Verwenden Sie die Methode aus (a), um die zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

inverse Matrix zu bestimmen.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie: Sind V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$, so gilt

$$\operatorname{Kern} f^* = \left\{\beta \in W^* \colon\ \beta|_{\operatorname{Bild} f} = 0\right\}.$$

Bemerkung: Dies ist die allgemeine Aussage, die sich in dem Beispiel von Aufgabe 3 versteckt.

Abgabe: Mittwoch 24.4.24
bis spätestens 16 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).