Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Es seien M, N, M', N' Mengen. Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Menge

$$(M \times N) \setminus (M' \times N')$$

im allgemeinen verschieden ist von der Menge

$$(M \setminus M') \times (N \setminus N').$$

Zeigen Sie, andererseits, daß $(M \times N) \setminus (M' \times N')$ stets als Vereinigung zweier Mengen der Form $A \times B$ geschrieben werden kann.

Aufgabe 2. Gegeben seien Mengen A, B, C und Abbildungen $f\colon A \longrightarrow B$ und $g\colon B \longrightarrow C$. Zeigen Sie:

(a) Sind f und g injektiv, so auch $g \circ f$.

(b) Ist $g \circ f$ injektiv, so auch f.

(c) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Bedingung „f ist surjektiv“ in (c) nicht weggelassen werden kann.

Aufgabe 3. Es seien M, N Mengen und $f\colon M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Zusätzlich seien A und B Teilmengen von M sowie C und D Teilmengen von N. Beweisen oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel) die folgenden Aussagen:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

Kann man die falsche(n) Aussage(n) zu (einer) richtigen Aussage(n) machen, indem man die Mengengleichheit zu einer Mengeninklusion $\subset$ oder $\supset$ abschwächt?

b.w.

Aufgabe 4. Formulieren Sie die folgenden Aussagen mittels der Quantoren $\forall$ und $\exists$. Negieren Sie dann die Aussagen formal. Übersetzen Sie diese negierten Aussagen zurück in „Umgangssprache“. Hier ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Zu jedem $x_0 \in I$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, daß $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

(b) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß für jedes $x_0 \in I$ und jedes $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, daß $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Bemerkung. Hier handelt es sich um die Definition von **Stetigkeit** bzw. **gleichmäßiger Stetigkeit**, die wir später im Detail kennenlernen werden.

Abgabe: Montag 22.10.07 in der Vorlesung.