Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) Für $q \in (0,1) \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k$$

(ii) Für $a \in \mathbb{R}_0^+$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^{n+1}}$$

(iii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

Aufgabe 2. Für $a, b, x_1 \in \mathbb{R}^+$ zeige man, daß die rekursiv definierte Folge (x_n) mit

$$x_{n+1} := \frac{a+bx_n}{b+ax_n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

konvergiert, und man bestimme den Grenzwert.
(**Hinweis:** Betrachte $y_n = (x_n - 1)/(x_n + 1)$.)

Aufgabe 3. Sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen, die gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie, daß dann auch die Folge (S_n), definiert durch

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

gegen a konvergiert. Untersuchen Sie, ob auch die Umkehrung gilt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie sowohl mittels des ε-δ-Kriteriums als auch mittels des Folgenkriteriums:

(a) Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{x}$$

ist stetig.

(b) Die Funktion $g\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ für $|x| < \sqrt{2}$ und $g(x) = 1$ für $|x| > \sqrt{2}$ ist stetig.

b.w.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß für $k \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

(**Hinweis:** Schreiben Sie a als $1 + b$ mit $b > 0$ und verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz, um eine Abschätzung der Form

$$\frac{n^k}{a^n} < c(k, b) \cdot \frac{1}{n}$$

für große n zu erreichen, wobei $c(k, b)$ eine reelle Zahl ist, die nur von k und b abhängt.)

Bonusaufgabe.

(a) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die nur an den Stellen $x_0 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Definieren Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls} \quad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ 1 & \text{, falls} \quad x = 0 \\ 1/q & \text{, falls} \quad x = p/q \in \mathbb{Q} \quad \text{mit } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

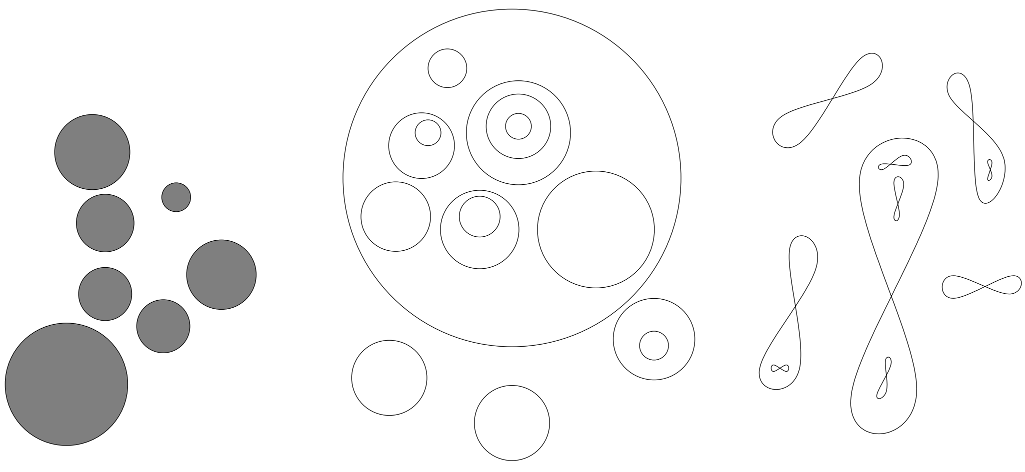
Dann ist f stetig in genau den Punkten $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Knobelaufgabe.

(a) Jede Menge disjunkter Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ is abzählbar.

(b) Es gibt eine überabzählbare Menge disjunkter Kreise in $\mathbb{R}^2$.

(c) Gibt es eine überabzählbare Menge disjunkter Achter in $\mathbb{R}^2$?



Abgabe: Montag 19.11.07 in der Vorlesung.