WS 2007/2008

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 9

Aufgabe 1.

(a) Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, sei $f\colon \mathbb{R}\backslash\{a,b\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 1/((x-a)(x-b))$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f, indem Sie f zunächst in der Form

$$f(x) = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)}$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$ geeignet darstellen.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 5x + 2}{(x^2 + 2x + 2)(x-1)^2}.$$

Schreiben Sie f in der Form

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 2x + 2} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ geeignet. Bestimmen Sie dann eine Stammfunktion von f.

Bemerkung. Das in diesen Beispielen angegebene Verfahren heißt **Partialbruchzerlegung**. Allgemein läßt sich jede echte rationale Funktion $f(x) = p(x)/q(x)$ mit reellen Polynomen p, q, für die $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$ gilt, als Summe von Termen der Form

$$\frac{sx + t}{(x-c)^k} \qquad \text{oder} \qquad \frac{sx + t}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

schreiben, wobei $x - c$ bzw. $ax^2 + bx + c$ mit $4ac - b^2 > 0$ (d.h. $ax^2 + bx + c$ ohne reelle Nullstelle) die Faktoren von $q(x)$ sind, und k bis zu der Potenz läuft, mit der der entsprechende Faktor in $q(x)$ auftritt.

Aufgabe 2. Die Funktionen $\sinh(z) = (e^z - e^{-z})/2$, $\cosh(z) = (e^z + e^{-z})/2$ heißen **Sinus hyperbolicus** bzw. **Cosinus hyperbolicus**.

(a) Bestimmen Sie die Reihendarstellung dieser Funktionen (als Potenzreihen in z).

(b) (i) $\sinh(z)$ ist eine **ungerade** Funktion, d.h. $\sinh(-z) = -\sinh(z)$; $\cosh(z)$ eine **gerade** Funktion, d.h. $\cosh(-z) = \cosh(z)$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = 1$ für $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$.

(iv) $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ (Erklären Sie damit „hyperbolicus" im Namen der Funktionen).

(c) Skizzieren Sie die Graphen von sinh und cosh über $\mathbb{R}$.

Weiter seien $\tanh(z) = \sinh(z)/\cosh(z)$ und $\coth(z) = \cosh(z)/\sinh(z)$ der **hyperbolische Tangens** bzw. **Cotangens**.

(d) Bestimmen Sie den Definitionsbereich dieser Funktionen und ihre Ableitungen, und skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen über $\mathbb{R}$.

b.w.

(e) Begründen Sie die Existenz der folgenden Umkehrfunktionen (lies „**Areasinus hyperbolicus**“ etc.).

$$\begin{array}{lccc} \mathrm{Arsinh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{Arcosh}: & (1,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \mathrm{Artanh}: & (-1,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{Arcoth}: & \mathbb{R}\setminus[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

Bestimmen Sie die Ableitungen dieser Funktionen.

Aufgabe 3. Finden Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\text{(i)} \int \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx, \quad n \in \mathbb{Z} \qquad \text{(ii)} \int \log^n x\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{(iii)} \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \qquad \text{(iv)} \int \cos^5 x\,dx$$

$$\text{(v)} \int \sqrt{x^2+1}\,dx$$

(**Hinweise:** (ii) explizit für $n = 1$, dann rekursive Formel; (iii) dito; (iv) partielle Integration oder Substitution; (v) Hyperbelfunktionen)

Aufgabe 4.

(a) Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale durch geeignete Substitution:

$$\text{(i)} \int_1^\infty \frac{dx}{e^x - e^{-x}} \qquad \text{(ii)} \int_{-a}^{a} \frac{x^2}{\sqrt{a-x^2}}dx$$

(a) Existieren

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \sin x\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx?$$

Bonusaufgabe. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt **komplex differenzierbar** in $z_0 \in U$, falls es eine in z_0 stetige Funktion $\Delta\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt, so daß

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z).$$

$f'(z_0) := \Delta(z_0)$ heißt die **komplexe Ableitung** von f in z_0. Ist f in jedem Punkt in U komplex differenzierbar, so heißt f **holomorph** auf U.

(a) Sei f holomorph auf der zusammenhängenden und offenen Menge U, und $f' \equiv 0$. Dann ist f konstant.
(**Hinweis:** Man betrachte $g(t) = f(z_0 + tz)$ für kleine $t \in \mathbb{R}$ und überlege sich, daß die Kettenregel angewendet werden kann.)

(b) Zeigen Sie durch Betrachtung der Funktion

$$f(z) = e^{-z}e^{z+w},$$

daß die Produktformel

$$e^z e^w = e^{z+w}$$

auch für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt.
(**Hinweis:** Komplexe Potenzreihen sind im Inneren ihres Konvergenzradius holomorph, und die Ableitung ergibt sich durch gliedweises Ableiten.)

Knobelaufgabe. Wir nehmen ein großes Blatt Papier mit parallelen Linien im Abstand h. Zeigen Sie durch die Berechnung eines geeigneten Integrals, daß die Wahrscheinlichkeit, daß eine auf das Blatt geworfene Nadel der Länge $l < h$ eine der Linien berührt, gleich $2l/\pi h$ ist.

Abgabe: Montag 17.12.07 in der Vorlesung.